Řešení úloh 1. kola 50. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 3, 6), P. Šedivý (4, 6), J. Jírů (5, 7).

1. a) Jedná se o vrh šikmo vzhůru. Pro první střelu platí

$$T_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad l_1 = v_0 T_1 \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Pro pohyb druhé střely můžeme psát

$$l_1 = v_0 t_2 \cos 2\alpha.$$

Porovnáním obou vztahů pro l_1 dostaneme

$$v_0 T_1 \cos\alpha = v_0 t_2 \cos 2\alpha.$$

Dále užijeme součtové vzorce $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, z nichž dostaneme $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Po dosazení tohoto vztahu do výše uvedené rovnice dostaneme

$$(2\cos^2\alpha - 1)t_2 - T_1 \cos\alpha = 0,$$

tj.

$$2t_2 \cos^2\alpha - T_1\cos\alpha - t_2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice. My budeme hledat její řešení pro $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Z tohoto důvodu bude mít význam pouze řešení

$$\cos\alpha = \frac{T_1 + \sqrt{T_1^2 + 8t_2^2}}{4t_2}. \tag{1}$$

Po dosazení za $t_2 = 1{,}20\,T_1$ dostaneme $\cos\alpha = 0{,}9455$, z čehož $\alpha = 19{,}0°$.
Pro další výpočty za použití součtových vzorců a vztahů na jednotkové kružnici pak můžeme psát

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 0{,}3256,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}6158,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}7879.$$

Ze vztahu $T_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, pak můžeme vyjádřit rychlost v_0

$$v_0 = \frac{gT_1}{2\sin\alpha} = 1{,}5354\,gT_1.$$

4 body

b) Doba T_2, za kterou dopadne druhá střela, je dána vztahem

$$T_2 = \frac{2v_0 \sin 2\alpha}{g} = \frac{4v_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 2T_1 \cos\alpha .$$

Po dosazení za $\cos\alpha$ dostaneme $T_2 = 1{,}891\,T_1$.

2 body

c) Dolety obou střel jsou dány vztahy

$$l_1 = v_0 T_1 \cos\alpha = 1{,}5354 \cdot 0{,}9455 g T_1^2 = 1{,}45\, g T_1^2 ,$$

$$l_2 = v_0 T_2 \cos 2\alpha = 1{,}5354\, g T_1 \cdot 1{,}891 T_1 \cdot 0{,}7879 = 2{,}29\, g T_1^2 .$$

3 body

d) Maximální dolet $l_{\max}$ nastává pro úhel $\alpha = 45^\circ$ a je dán vztahem

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{1{,}5354^2 g^2 T_1^2}{g} = 2{,}36\, g T_1^2 .$$

1 bod

2. a) Označíme V_1 část objemu koule ponořené v kapalině hustoty ϱ_1, V_2 část objemu koule ponořené v kapalině hustoty ϱ_2, R poloměr koule a ϱ_{k} hustotu materiálu koule. Objem V_1 spodní části koule určíme jako objem kulové úseče, tj.

$$V_1 = \frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2) ,$$

kam dosadíme $\varrho = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} R^2}$, $v = \frac{R}{2}$.

Po dosazení

$$V_1 = \frac{\pi \frac{R}{2}}{6} \left[3 \cdot \frac{3}{4} R^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] = \frac{5}{24} \pi R^3 .$$

Objem V_2 pak určíme pomocí objemu celé koule a objemu V_1, tj.

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{5}{24}\pi R^3 = \frac{9}{8}\pi R^3 .$$

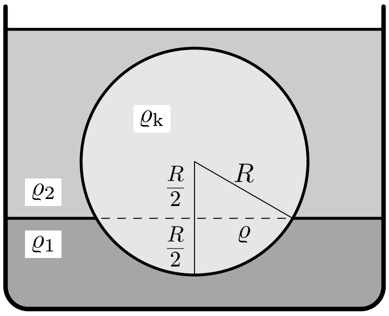
Z rovnosti sil $F_{\mathrm{vz1}} + F_{\mathrm{vz2}} = F_{\mathrm{G}}$ pak užitím Archimedova zákona dostaneme

$$\frac{5}{24}\pi R^3 \varrho_1 g + \frac{9}{8}\pi R^3 \varrho_2 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_{\mathrm{k}} g .$$

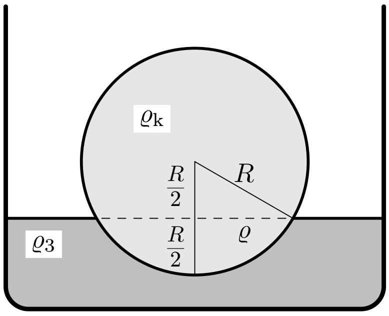
Z tohoto vztahu po úpravě pak můžeme vyjádřit ϱ_{k}, tj.

$$\varrho_k = \frac{5\varrho_1 + 27\varrho_2}{32} .$$

6 bodů



Obr. R1



Obr. R2

b) Označíme V_1 část objemu koule ponořeného v kapalině hustoty ϱ_3. Podle úlohy a) velikost objemu

$$V_1 = \frac{5}{24}\pi R^3.$$

Z rovnosti vztlakové a tíhové síly a užitím Archimedova zákona dostaneme

$$\frac{5}{24}\pi R^3 \varrho_3 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_k g.$$

Po úpravě dostaneme $\varrho_3 = \dfrac{32}{5}\varrho_k$. Po dosazení za ϱ_k z úlohy a) a úpravě je

$$\varrho_3 = \varrho_1 + \frac{27}{5}\varrho_2 = \varrho_1 + 5{,}4\varrho_2.$$

4 body

3. a) Před zasunutím slídové desky má kondenzátor kapacitu $C_0 = \dfrac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 ab}{d}$, kde ε_{r1} je relativní permitivita vzduchu. Po připojení ke zdroji napětí na něj přejde náboj $Q_0 = C_0 U$ a kondenzátor získá energii

$$E_0 = \frac{1}{2}C_0 U^2 = \frac{1}{2}UQ_0.$$

Zasuneme-li slídovou desku do výšky x, změní se kapacita kondenzátoru na

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 b(a-x)}{d} + \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 bx}{d} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}\left[\varepsilon_{r1}a + (\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1})x\right],$$

což lze přepsat do tvaru

$$C = C_0 + \Delta C = C_0 + \frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1})x.$$

Náboj na kondenzátoru se zvětší o $\Delta Q = \Delta C \cdot U$ a zdroj přitom vykoná elektrickou práci $W_z = U \cdot \Delta Q = \Delta C \cdot U^2$. Energie kondenzátoru se ale zvýší jen o $\Delta E = \frac{1}{2}\Delta C \cdot U^2 = \frac{1}{2}W_z$. Zbývající energie se spotřebuje na práci spojenou s vtažením desky z dielektrika mezi desky kondenzátoru:

$$W = W_\mathrm{z} - \Delta E = \frac{1}{2}W_\mathrm{z} = \frac{1}{2}\Delta Q \cdot U = \frac{1}{2}\Delta C U^2 = \frac{\varepsilon_0 b}{2d}(\varepsilon_\mathrm{r2} - \varepsilon_\mathrm{r1})U^2 x\,.$$

Vykonaná práce je přímo úměrná x. Síla působící na slídovou desku je tedy konstantní a pro výpočet její velikosti lze použít vztah

$$W = Fx \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_\mathrm{r2} - \varepsilon_\mathrm{r1})U^2.$$

4 body

b) Při řešení této části úlohy využijeme výsledku úlohy a). Síla F musí být v rovnováze s tíhovou silou F_G, tj.

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_\mathrm{r3} - \varepsilon_\mathrm{r1})U^2 = hdb\varrho g,$$

z čehož

$$h = \frac{\varepsilon_0}{2d^2}(\varepsilon_\mathrm{r3} - \varepsilon_\mathrm{r1})\frac{1}{\varrho g}U^2.$$

Pro dané hodnoty je $h = 6{,}7$ mm. **2 body**

c) Nejprve určíme hodnotu kapacity kondenzátoru z úlohy b) s užitím výsledku úlohy a). Dostaneme

$$C = C_0 + \frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_\mathrm{r3} - \varepsilon_\mathrm{r1})h\,,$$

po dosazení za h z úlohy b) a úpravě je

$$C = C_0 + \frac{\varepsilon_0^2 b}{2d^3}(\varepsilon_\mathrm{r3} - \varepsilon_\mathrm{r1})^2\frac{1}{\varrho g}U^2.$$

2 body

d) Má-li glycerin vystoupit až do výšky horních hran desek kondenzátoru, musí být $h = a$. Na základě úvahy v úloze b) o silách můžeme psát

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_\mathrm{r3} - \varepsilon_\mathrm{r1})U_\mathrm{a}^2 = abd\varrho g\,,$$

z čehož

$$U_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{2a\varrho g}{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r3} - \varepsilon_\mathrm{r1})}}\,d.$$

Pro dané hodnoty je $U_\mathrm{a} = 3{,}5$ kV. **2 body**

4. Celý děj se skládá z jednoho volného pádu a řady svislých vrhů vzhůru. Označme:

τ_0	…	doba volného pádu,
τ_i	…	doba výstupu a pádu po i-tém odrazu,
v_0	…	rychlost dopadu při volném pádu,
v_i	…	rychlost na počátku a na konci i-tého vrhu,
h_0	…	počáteční výška kuličky,
h_i	…	výška i-tého vrhu,
t_i	…	doba od počátku děje do i-tého odrazu,
$t_i^\star$	…	doba od počátku děje do i-tého výstupu.

a) Můžeme-li zanedbat odpor vzduchu, platí

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,, \qquad v_0 = \sqrt{2gh_0}\,, \qquad v_1 = kv_0\,, \qquad h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = k^2 h_0\,,$$

$$v_i = k^i v_0\,, \qquad h_i = \frac{v_i^2}{2g} = k^{2\mathrm{i}} h_0\,,$$

$$\tau_1 = \frac{2v_1}{g} = 2k\tau_0\,, \qquad \tau_i = \frac{2v_i}{g} = 2k^i\tau_0\,.$$

Celkovou dobu pohybu můžeme vyjádřit pomocí součtu nekonečné geometrické řady:

$$t = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \cdots = \tau_0\left[-1 + 2\left(1 + k + k^2 + \cdots\right)\right] = \tau_0\left(-1 + \frac{2}{1-k}\right)\,,$$

$$t = \tau_0\frac{1+k}{1-k}\,, \qquad k = \frac{t-\tau_0}{t+\tau_0}\,.$$

Pro dané hodnoty $\tau_0 = 0,452$ s, $k = 0,893$.

3 body

b) Při každém odrazu se zmenší mechanická energie kuličky v poměru

$$E_i : E_{\mathrm{i}+1} = \frac{1}{2}mv_i^2 : \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}+1}^2 = 1 : k^2\,.$$

Relativní změna energie je

$$\frac{E_{\mathrm{i}+1} - E_i}{E_i} = k^2 - 1 = -0,202 = -20,2\,\%\,.$$

2 body

c) Také celkovou dráhu kuličky s určíme užitím součtu nekonečné geometrické řady:

$$s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \cdots = h_0\left[-1 + 2\left(1 + k^2 + k^4 + \cdots\right)\right]\,,$$

$$s = h_0\left(-1 + \frac{2}{1-k^2}\right) = h_0\frac{1+k^2}{1-k^2}\,.$$

Pro dané hodnoty $s = 8,9$ m. **2 body**

d) Dobu t_i od počátku děje do i-tého odrazu určíme užitím vztahu pro výpočet součtu prvních i členů geometrické posloupnosti:

$$t_i = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_{\mathrm{i}-1} = \tau_0\left[-1 + 2\left(1 + k + k^2 + \cdots + k^{\mathrm{i}-1}\right)\right]\,,$$

$$t_i = \tau_0\left(-1 + 2\frac{k^i - 1}{k-1}\right) = \tau_0\frac{2k^i - k - 1}{k-1}\,.$$

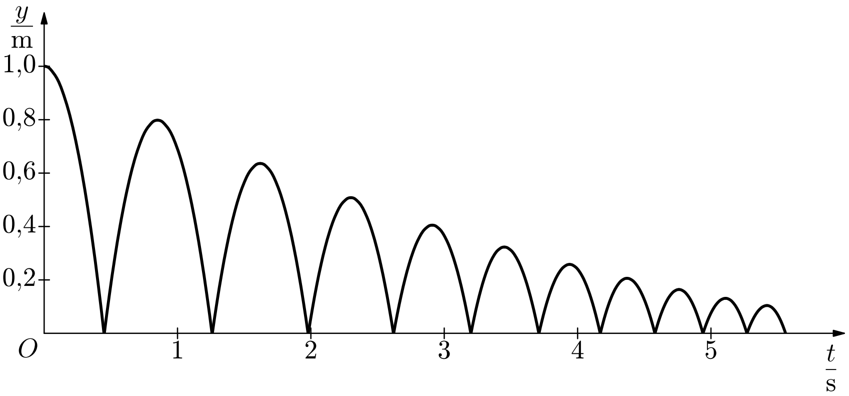
Dobu $t_i^\star$ od počátku děje do i-tého výstupu určíme pomocí vztahu

$$t_i^\star = t_i + \frac{\tau_i}{2} = t_i + \tau_0 k^i.$$

Výsledky výpočtů pro dané hodnoty jsou v následující tabulce; graf závislosti okamžité výšky kuličky na čase je na obr. R3.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_i/s	0,45	1,26	1,98	2,62	3,20	3,71	4,17	4,58	4,94	5,27	5,56
$t_i^\star/\mathrm{s}$	0,85	1,62	2,30	2,91	3,45	3,94	4,37	4,76	5,11	5,42	5,69
h_i/mm	798	636	508	405	323	258	206	164	131	104	83

3 body



Obr. R3

5. a) Označme R_1 odpor žárovky. Podle Ohmova zákona platí vztah

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_\mathrm{e} - U_1}{R}\,. \tag{1}$$

Dále odpor žárovky splňuje rovnici

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = \frac{U_1^2}{P_1} \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne $R = \dfrac{U_1(U_\mathrm{e} - U_1)}{P_1}$.
Úloha má řešení za předpokladu $R < R_0$.
Účinnost obvodu je $\eta = \dfrac{U_1}{U_\mathrm{e}}$.
Číselně dostaneme $R = 6{,}0\ \Omega$, $\eta = \dfrac{1}{3}$.

4 body

b) Obdobně podle Ohmova zákona platí

$$\frac{U_1}{\dfrac{RR_1}{R + R_1}} = \frac{U_\mathrm{e} - U_1}{R_0 - R}\,.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$U_1R^2 + (U_eR_1 - U_1R_0)R - U_1R_1R_0 = 0\,.$$

Z jejich dvou kořenů má fyzikální význam

$$R = \frac{U_1R_0 - U_eR_1 + \sqrt{U_1^2R_0^2 + U_e^2R_1^2 + 2U_1R_1R_0(2U_1 - U_e)}}{2U_1}\,.$$

Dosazením za R_1 z rovnice (2) a úpravou dostaneme

$$R = \frac{1}{2}\left[R_0 - \frac{U_eU_1}{P_1} + \sqrt{R_0^2 + \frac{U_e^2U_1^2}{P_1^2} + \frac{2U_1(2U_1 - U_e)}{P_1}R_0}\right]. \qquad (3)$$

4 body

Účinnost obvodu je

$$\eta = \frac{P_1}{\dfrac{U_e^2}{R_0 - R + \dfrac{RR_1}{R + R_1}}}\,.$$

Dosazením za R_1 z rovnice (2) a úpravou dostaneme

$$\eta = \frac{P_1}{U_e^2}\left(R_0 - \frac{P_1R^2}{P_1R + U_1^2}\right).$$

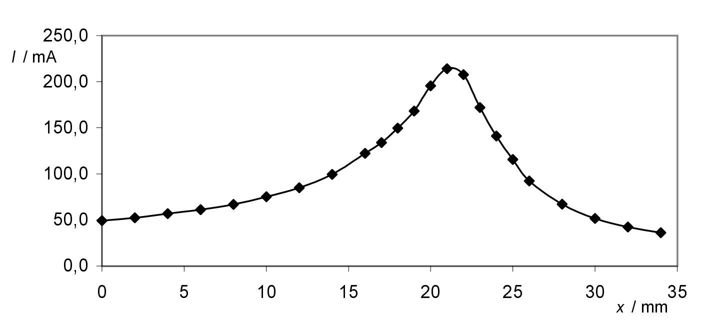
kde R je dáno rovnicí (3).

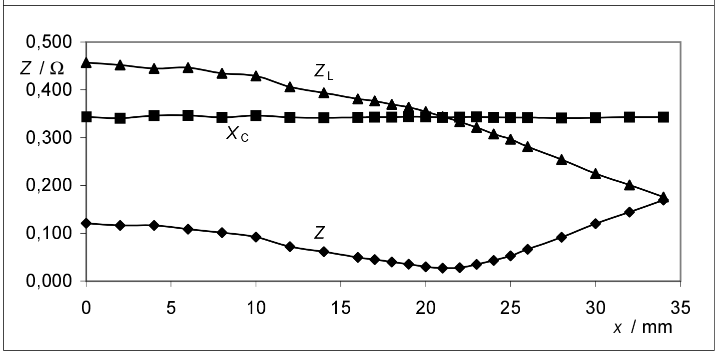
Číselně dostaneme $R = 15\ \Omega$, $\eta = \frac{5}{18}$.

2 body

6. Ukázka výsledků měření je v následující tabulce a grafech. K rezonanci došlo pro $x = 21$ mm. Rezonanční impedance byla $Z_{\min} = R = 27\ \Omega$, tedy asi 2,2krát větší než stejnosměrný odpor vinutí $R_{ss} = 12{,}1\ \Omega$. Impedance samotné cívky při rezonanci měla hodnotu $Z_{LR} = 344\ \Omega$. Kapacitní reaktance kondenzátoru se během měření neměnila; průměr změřených hodnot je $X_C = 343\ \Omega$. Z toho vypočítáme skutečnou kapacitu kondenzátoru $C = 9{,}28\ \mu$F. Výpočet indukčnosti cívky při rezonanci pomocí vztahů (2) a (3) vede ke stejnému výsledku $L = 1{,}09$ H.

x / mm	I / mA	U / V	U_C / V	U_{LR} / V	Z / Ω	X_C / Ω	Z_{LR} / Ω
0	49,3	5,97	16,92	22,53	0,121	0,343	0,457
2	52,4	6,10	17,86	23,69	0,116	0,341	0,452
4	56,8	6,17	18,14	23,30	0,116	0,346	0,445
6	61,1	6,17	19,70	25,37	0,109	0,347	0,447
8	66,9	6,17	20,94	26,54	0,101	0,343	0,434
10	75,1	6,13	23,16	28,70	0,092	0,346	0,429
12	84,9	6,11	29,08	34,50	0,072	0,343	0,406
14	99,4	6,09	33,97	39,16	0,061	0,342	0,394
16	122,2	6,05	41,88	46,58	0,050	0,343	0,381
17	133,9	6,03	45,90	50,43	0,045	0,343	0,377
18	149,6	5,98	51,30	55,29	0,040	0,343	0,370
19	168,1	5,92	57,83	61,14	0,035	0,344	0,364
20	195,6	5,84	67,15	69,28	0,030	0,343	0,354
21	214,1	5,80	73,32	73,67	0,027	0,342	0,344
22	207,6	5,83	71,15	69,23	0,028	0,343	0,333
23	172,0	5,96	59,06	55,29	0,035	0,343	0,321
24	141,0	6,05	48,30	43,37	0,043	0,343	0,308
25	115,7	6,09	39,56	34,35	0,053	0,342	0,297
26	92,3	6,13	31,57	25,94	0,066	0,342	0,281
28	67,1	6,16	22,90	17,05	0,092	0,341	0,254
30	51,5	6,18	17,58	11,58	0,120	0,341	0,225
32	42,3	6,10	14,50	8,50	0,144	0,343	0,201
34	36,2	6,13	12,42	6,36	0,169	0,343	0,176
					Průměr	0,343	





7. a) Podle ZZE pružina zmenší svoji potenciální energii pružnosti vykonáním práce při posunutí kvádru:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = fmg(x_1 - x_2)\,.$$

Z rovnice plyne $\quad f = \dfrac{k(x_1 + x_2)}{2mg} = 0{,}33\,.$

3 body

b) Souřadnice výsledné síly působící na kvádr splňuje rovnici

$$F_x = -kx + fmg\,.$$

Výsledná síla je nulová pro $\quad x = x_0 = \dfrac{fmg}{k}\,.$

Posuneme-li počátek osy do bodu o souřadnici x_0 a provedeme transformaci $x = x_0 + x'$, bude souřadnice výsledné síly splňovat rovnici

$$F_{x'} = -kx'\,,$$

což je podmínka harmonického pohybu s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Tedy uvedený pohyb kvádru představuje polovinu harmonického kmitu mezi krajními body o souřadnicích x_1 a x_2 přes rovnovážnou polohu o souřadnici

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

Velikost maximální výchylky tohoto pohybu je $x_\mathrm{m} = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$

a velikost maximální rychlosti $v_\mathrm{max} = \omega x_\mathrm{m} = \dfrac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 0{,}27\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$

5 bodů

Jiné řešení: Rychlost kvádru je největší při průchodu rovnovážnou polohou. Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_\mathrm{max}^2 + fmg(x_1 - x_0) =$$
$$= \frac{1}{2}k\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{max}^2 + \frac{k(x_1 + x_2)}{2}\cdot\frac{x_1 - x_2}{2}\,.$$

Z toho

$$v_\mathrm{max}^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4}\cdot\frac{k}{m}\,, \qquad v_\mathrm{max} = \frac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

c) Doba pohybu je rovna polovině periody uvažovaného harmonického pohybu:

$$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}41\ \mathrm{s}\,.$$

2 body