**Řešení úloh 1. kola 50. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (3), P. Šedivý (1, 2, 5, 6, 7), 4. úloha je převzata z Moskevské FO.

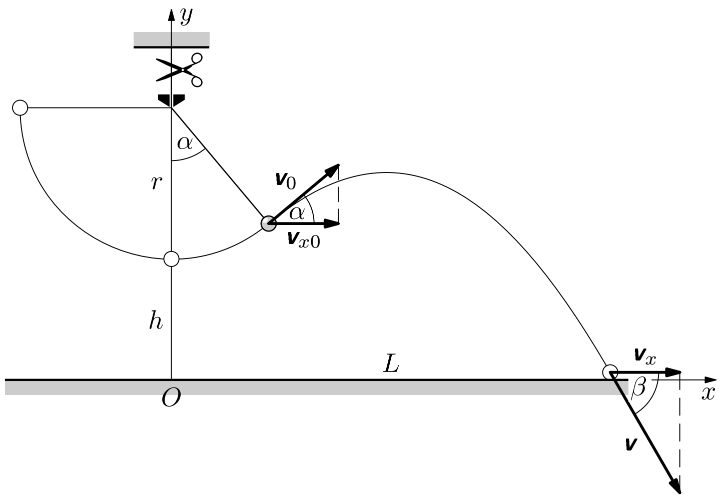
**1.** a) Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R1. Po přestřižení vlákna koná kulička šikmý vrh s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ a elevačním úhlem $\alpha$. Velikost počáteční rychlosti určíme ze zákona zachování energie:

$$mgr\cos\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gr\cos\alpha} = 3{,}877\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{1}$$

Během vrhu platí pro souřadnice kuličky

$$x = r\sin\alpha + v_0 t\cos\alpha\,, \tag{2}$$

$$y = h + r(1-\cos\alpha) + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{3}$$




Obr. R1

V okamžiku dopadu je $y = 0$. Z toho určíme dobu vrhu:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0\sin\alpha\cdot t - h - r(1-\cos\alpha) = 0\,;$$

úloze vyhovuje kladný kořen

$$t = \frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2g[h + r(1-\cos\alpha)]}}{g} =$$

$$= \frac{\sqrt{2gr\cos\alpha}\sin\alpha + \sqrt{2gr\cos\alpha\sin^2\alpha + 2g[h + r(1-\cos\alpha)]}}{g} = 0{,}779\ \mathrm{s}\,. \tag{4}$$

Dosazením do (2) dostaneme hledanou vzdálenost $L = 2{,}96$ m.

**3 body**

b) Velikost rychlosti dopadu určíme užitím zákona zachování mechanické energie:

$$mg(h+r) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(h+r)} = 5{,}94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \,.$$

Vodorovná složka rychlosti je během vrhu konstantní a má velikost

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 2{,}97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \,.$$

Rychlost dopadu je odchýlena od vodorovného směru o úhel

$$\beta = \arccos\frac{v_x}{v} = 60{,}0^\circ \,.$$

**3 body**

c) Dosazením vzorců (4) a (2) do tabulky Excelu, jejich kopírováním a postupným zjemňováním dělení intervalu dostaneme výsledek:

| $\alpha$ | $t$ / s | $L$ / m | $\alpha$ | $t$ / s | $L$ / m | $\alpha$ | $t$ / s | $L$ / m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,40386 | 1,78885 | 33 | 0,72191 | 3,00058 | 50 | 0,83662 | 2,67581 |
| 5 | 0,44599 | 2,05139 | 34 | 0,73070 | 3,00234 | 55 | 0,85327 | 2,46096 |
| 10 | 0,49284 | 2,30709 | 34,2 | 0,73243 | 3,00236 | 60 | 0,86087 | 2,21419 |
| 15 | 0,54292 | 2,54178 | 34,4 | 0,73416 | 3,00227 | 65 | 0,85897 | 1,95164 |
| 20 | 0,59445 | 2,74055 | 34,6 | 0,73588 | 3,00208 | 70 | 0,84715 | 1,69026 |
| 25 | 0,64556 | 2,88980 | 34,8 | 0,73759 | 3,00177 | 75 | 0,82474 | 1,44694 |
| 30 | 0,69440 | 2,97888 | 35 | 0,73929 | 3,00135 | 80 | 0,79020 | 1,23808 |
| 31 | 0,70375 | 2,98883 | 40 | 0,77874 | 2,95550 | 85 | 0,73846 | 1,08036 |
| 32 | 0,71292 | 2,99607 | 45 | 0,81152 | 2,84445 | 90 | 0,60578 | 1,00000 |

Kulička dopadne do největší vzdálenosti $L_{\max} = 3{,}0024 \text{ m} \doteq 3{,}00 \text{ m}$, jestliže vlákno přestřihneme při dosažení úhlu $\alpha = 34{,}2^\circ \doteq 34^\circ$.

**4 body**

**2.** a) Jestliže třetí závaží klesne do hloubky $h$, vystoupí obě krajní závaží do výšky $\sqrt{d^2+h^2}-d$. Soustava bude mít potenciální energii

$$E_\mathrm{p} = 2mg(\sqrt{d^2+h^2}-d) - mgh = mg(2\sqrt{d^2+h^2}-2d-h)\,.$$

**2 body**

b) Kinetická energie soustavy se nejprve zvětšuje, pak zmenšuje a v dolní úvrati je opět nulová. Jsou-li splněny podmínky zadání, můžeme ztráty mechanické energie během prvního pohybu dolů zanedbat a použít zákon zachování mechanické energie. V dolní úvrati tedy platí

$$2\sqrt{d^2+h_\mathrm{m}^2}-2d-h_\mathrm{m}=0\,.$$

Úpravou dostaneme rovnici $3h_\mathrm{m}^2-4h_\mathrm{m}d=0$. Úloze vyhovuje kořen

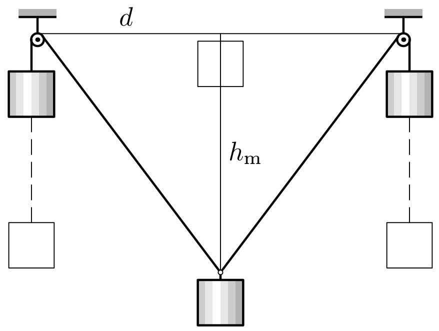
$$h_\mathrm{m}=\frac{4}{3}d\,.$$

Délka vláken mezi kladkou a třetím závažím v dolní úvrati je

$$\sqrt{d^2+\frac{16}{9}d^2}=\frac{5}{3}d<2d\,.$$

Krajní závaží se tedy zastaví před dosažením kladek (obr. R2).

**2 body**




Obr. R2

c) V rovnovážné poloze (obr. R3) jsou výslednice sil působících na jednotlivá závaží nulové. Tahová síla vlákna má stejnou velikost jako tíha závaží a platí

$$mg = 2T\sin\alpha = 2mg\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{1}{2}\,,\quad \alpha=30^\circ\,,\quad h_0=d\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{d}{\sqrt{3}}\,.$$

Soustava získává kinetickou energii na úkor energie potenciální. Během pohybu je tedy celková potenciální energie záporná. Platí

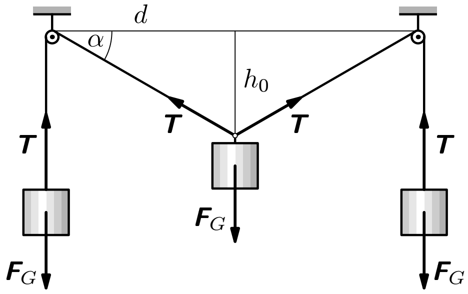
$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}=mg\left[(d^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2h-1\right].$$

Snadno se přesvědčíme, že pro $h=h_0=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ je $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}=0$,

pro $0<h<h_0$ je $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}<0$ a pro $h_0<h<h_\mathrm{m}$ je $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}>0$. V rovnovážné poloze je tedy potenciální energie soustavy minimální a má hodnotu

$$E_\mathrm{p}(h_0) = 2mgd\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right) - mg\frac{d}{\sqrt{3}} = mgd(\sqrt{3} - 2)\,.$$

**2 body**




Obr. R3

d) Druhým derivováním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h^2} = mg\left[-\frac{1}{2}(d^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2h \cdot 2h + (d^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\right] = 2mgd^2(d^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}}\,.$$

V bodě $h_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ je $\dfrac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h^2} = \dfrac{mg}{d} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,.$

V okolí rovnovážné polohy tedy platí

$$E_\mathrm{p}(h_0 + \mathrm{d}h) = E_\mathrm{p}(h_0) + \frac{mg}{d} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot (\mathrm{d}h)^2\,.$$

**2 body**

e) Energie, kterou získá soustava malým vychýlením třetího závaží z rovnovážné polohy působením vnější síly, je rovna energii kmitání, které následuje po jeho uvolnění. Výchylka třetího závaží je rovna amplitudě jeho kmitů. Označme ji $y_\mathrm{m}$. Krajní závaží budou v důsledku neroztažitelnosti vlákna kmitat s amplitudou $y_\mathrm{m} \sin 30^\circ = y_\mathrm{m}/2$. Při průchodu rovnovážnou polohou bude mít třetí závaží rychlost $v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m}$, krajní závaží budou mít při průchodu rovnovážnými polohami rychlost poloviční. Energie kmitů je

$$\frac{mg}{d} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot y_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m\left(\frac{v_\mathrm{m}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}m\omega^2y_\mathrm{m}^2\,.$$

Z toho

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{g\sqrt{3}}}\,.$$

**2 body**

**3.** a) Zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie dávají pro první ráz rovnice

$$m_1 v_0 = m_1 u_1 + m u\,, \qquad \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m u^2\,.$$

Z rovnic dostaneme souřadnice rychlosti levé a prostřední koule po první srážce:

$$u_1 = \frac{m_1 - m}{m_1 + m} v_0\,, \tag{1}$$

$$u = \frac{2m_1}{m_1 + m} v_0\,. \tag{2}$$

Druhá srážka probíhá analogicky, stačí v rovnicích (1) a (2) provést substituci $m_1 \to m,\ m \to m_2,\ v_0 \to u,\ u_1 \to w,\ u \to w_2$:

$$w = \frac{m - m_2}{m + m_2} u\,, \tag{3}$$

$$w_2 = \frac{2m}{m + m_2} u\,. \tag{4}$$

Dosazením proměnné $u$ z rovnice (2) do rovnic (3) a (4) dostaneme:

$$w = \frac{2m_1(m - m_2)}{(m + m_1)(m + m_2)} v_0\,, \tag{5}$$

$$w_2 = \frac{4mm_1}{(m + m_1)(m + m_2)} v_0\,. \tag{6}$$

**3 body**

Nyní budeme hledat hodnotu proměnné hmotnosti $m$, pro kterou bude rychlost $w_2$ maximální. Funkci danou rovnicí (6) derivujeme podle $m$:

$$\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} \frac{4mm_1}{m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1 m_2} v_0 =$$

$$= \frac{4m_1 \left[m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1 m_2\right] - 4m_1 m(2m + m_1 + m_2)}{\left[m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1 m_2\right]^2} v_0 =$$

$$= \frac{4m_1(m_1 m_2 - m^2)}{\left[m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1 m_2\right]^2} v_0\,.$$

Derivace je nulová pro

$$m = \sqrt{m_1 m_2}\,. \tag{7}$$

Pro $m < \sqrt{m_1 m_2}$ je derivace kladná a funkce je tedy rostoucí, pro $m > \sqrt{m_1 m_2}$ je derivace záporná a funkce je tedy klesající. Nalezený extrém je tedy maximem. Ke stejnému závěru můžeme dojít užitím druhé derivace. Číselně vychází $m = 3{,}00$ kg. Při záměně hmotností $m_1$ a $m_2$ se výsledek nezmění.

**3 body**

b) Dosazením vztahu (7) do vztahů (1), (5) a (6) dostaneme

$$u_1 = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} v_0 = \frac{1}{5} v_0 = 0{,}20 v_0 \,,$$

$$w = \frac{2\sqrt{m_1}\left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)}{\left(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}\right)^2} v_0 = \frac{6}{25} v_0 = 0{,}24 v_0 \,,$$

$$w_2 = \frac{4m_1}{\left(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}\right)^2} v_0 = \frac{36}{25} v_0 = 1{,}44 v_0 \,.$$

Záměnou hmotností dostaneme

$$u_1 = -\frac{1}{5} v_0 = -0{,}20 v_0 \,, \quad w = -\frac{4}{25} v_0 = -0{,}16 v_0 \,, \quad w_2 = \frac{16}{25} v_0 = 0{,}64 v_0 \,.$$

**2 body**

c) Hledáme poměr

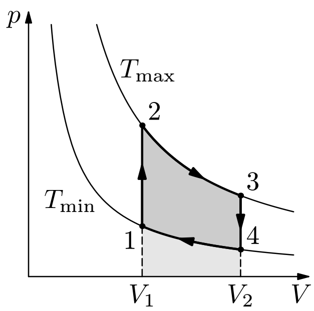
$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 w_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \,.$$

Dosazením ze vztahů (6) a (7) dostaneme

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{16 m_1 m_2}{\left(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}\right)^4} = \frac{576}{625} = 0{,}922 \,.$$

Při záměně hmotností se výsledek nezmění. **2 body**

**4.** a)




Obr. R4

$p$-$V$ diagram kruhového děje je na obr. R4. Teplota během cyklu roste jen při izochorickém ohřátí 1 → 2 a klesá jen při izochorickém ochlazení 3 → 4. Při izotermických dějích se nemění. Plyn má tedy teplotu $T_{\min}$ při izotermické kompresi 4 → 1 a teplotu $T_{\max}$ při izotermické expanzi 2 → 3. Teplo získané při izochorickém ohřátí je rovno přírůstku vnitřní energie:

$$Q_1 = \Delta U = \frac{3}{2} nR (T_{\max} - T_{\min}) \,.$$

Z toho $$T_{\max} = T_{\min} + \frac{Q_1}{\frac{3}{2} nR} \,.$$

**3 body**

b) Při izochorickém ochlazení 3 $\rightarrow$ 4 je teplo $Q_1'$ odevzdané plynem rovno úbytku vnitřní energie:

$$Q_1' = -\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_{\max} - T_{\min}) = Q_1 \,.$$

Teplo $Q_2'$ odevzdané plynem při izotermické kompresi 4 $\rightarrow$ 1 je rovno práci, kterou při ní plyn spotřebuje. Teplo $Q_2$ přijaté při izotermické expanzi 2 $\rightarrow$ 3 je rovno práci, kterou při ní plyn vykoná. Obě práce jsou číselně rovny obsahu obrazce omezeného v grafu příslušnou izotermou. Rovnice izoterm odvodíme ze stavové rovnice:

$$p_{\mathrm{h}} = \frac{nRT_{\max}}{V} \quad \text{pro horní izotermu,} \quad p_{\mathrm{d}} = \frac{nRT_{\min}}{V} \quad \text{pro horní izotermu.}$$

Pro kterýkoliv objem $V$ je $p_{\mathrm{d}}/p_{\mathrm{h}} = T_{\min}/T_{\max}$. Ve stejném poměru jsou tedy i plochy omezené v daném úseku oběma izotermami. Proto

$$\frac{Q_2'}{Q_2} = \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \,, \qquad Q_2' = Q_2 \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{\frac{3}{2} nRT_{\min} Q_2}{\frac{3}{2} nRT_{\min} + Q_1} \,.$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít také porovnáním vztahů

$$Q_2 = nRT_{\max} \ln \frac{V_2}{V_1} \,, \qquad Q_2' = nRT_{\min} \ln \frac{V_2}{V_1} \,,$$

kde $V_1$, $V_2$ jsou objemy plynu při izochorickém ohřátí a při izochorickém ochlazení.

**3 body**

c) Celková práce plynu během jednoho cyklu je rovna rozdílu přijatého a odevzdaného tepla:

$$W' = Q_1 + Q_2 - (Q_1' + Q_2') = Q_2 - Q_2' = Q_2 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right) = \frac{Q_1 Q_2}{\frac{3}{2} nRT_{\min} + Q_1} \,.$$

**2 body**

d) Termodynamická účinnost cyklu je

$$\eta = \frac{W'}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)\left(\frac{3}{2} nRT_{\min} + Q_1\right)} \,.$$

**2 body**

**5.** a) Označme náboje a napětí na jednotlivých kondenzátorech podle obr. R5. Ze zákona zachování náboje plyne

$$Q_1 + Q_4 = Q_2 + Q_5\,,$$
$$Q_2 - Q_3 - Q_1 = 0\,.$$

Z toho

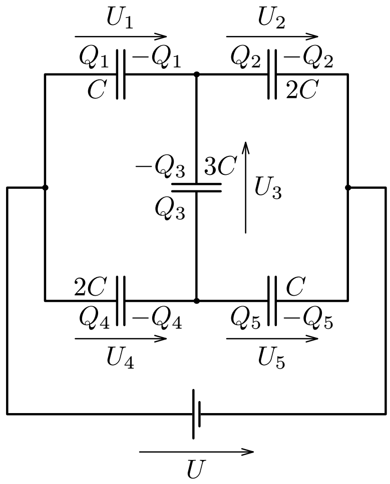
$$CU_1 + 2CU_4 = 2CU_2 + CU_5\,,$$
$$2CU_2 - 3CU_3 - CU_1 = 0\,.$$

Po úpravě

$$U_1 + 2U_4 = 2U_2 + U_5\,, \qquad (1)$$
$$2U_2 - 3U_3 - U_1 = 0\,. \qquad (2)$$

Dále platí:

$$U_1 + U_2 = U\,, \qquad (3)$$
$$U_4 + U_5 = U\,, \qquad (4)$$
$$U_4 + U_3 = U_1\,. \qquad (5)$$



Obr. R5

**4 body**

Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$U_1 = U_5 = \frac{5}{9}U\,, \quad U_2 = U_4 = \frac{4}{9}U\,, \quad U_3 = \frac{1}{9}U\,.$$

**3 body**

b) Ze zdroje přejde po sepnutí spínače na soustavu kondenzátorů náboj

$$Q = Q_1 + Q_4 = CU_1 + 2CU_4 = C \cdot \frac{5}{9}U + 2C \cdot \frac{4}{9}U = \frac{13}{9}CU\,.$$

Soustava má tedy celkovou kapacitu $\frac{13}{9}C$.

**3 body**

*Poznámka:* Výsledky řešení platí jen omezenou dobu po sepnutí spínače. Při trvalém zapojení soustavy kondenzátorů ke zdroji konstantního stejnosměrného napětí se uplatní svodové odpory jednak v dielektriku kondenzátorů, jednak v konstrukci, která soustavu nese (např. v desce plošných spojů). Jimi procházejí nepatrné proudy, které některé kondenzátory vybíjejí, jiné nabíjejí. Po dlouhé době se napětí v jednotlivých větvích upraví, jako by zde byla jen síť svodových odporů.

**6.** Na tyč působí tři síly: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, tažná síla provázku $\boldsymbol{F}_2$ a reakce podložky $\boldsymbol{F}_1$. Z podmínek rovnováhy plyne, že jejich vektorové přímky se protínají v jediném bodě (obr. R6). V okamžiku, kdy konec tyče začne klouzat po podložce, splňují velikosti vodorovné a svislé složky síly $\boldsymbol{F}_1$ vztah $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$, kde $f$ je součinitel smykového tření mezi tyčí a podložkou, a pro odchylku $\varphi$ této síly od svislého směru platí

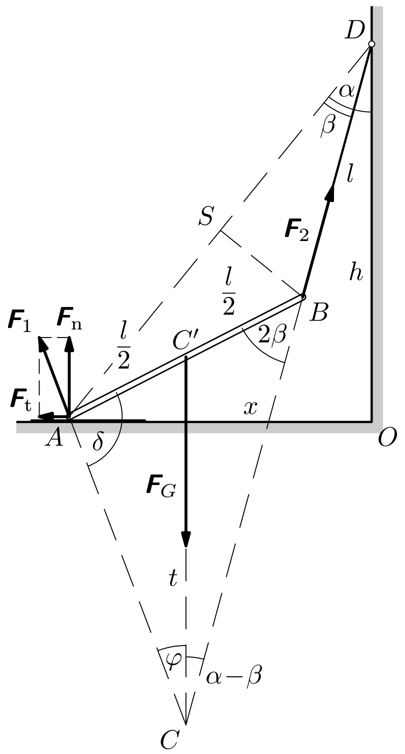
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}} = f\,.$$

Na trojúhelníky $ACC'$, $BCC'$ použijeme sinovou větu. Platí

$$\frac{0{,}5l}{t} = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}\,,$$

$$\delta = 180^\circ - \alpha - \beta - \varphi\,,$$

Postupnými úpravami dostaneme




Obr. R6

$$\sin\varphi\cdot\sin 2\beta = \sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi) =$$

$$= \sin(\alpha-\beta)\left[\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\varphi + \cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\varphi\right]\,,$$

$$\sin\varphi\left[\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)\right] = \cos\varphi\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)\,,$$

$$f = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{3\sin 2\beta - \sin 2\alpha}\,.$$

Úhly $\alpha$ a $\beta$ určíme z pravoúhlých trojúhelníků $AOD$ a $ABS$:

$$\alpha = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\,, \qquad \beta = \arccos\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{2l}\,.$$

**7.** Nejprve určíme poloměr $R_1$ první kulové plochy. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$R_1^2 = r^2 + \left(R_1 - \frac{r}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{5}{4}r\,.$$

**1 bod**

*1. způsob řešení — zobrazení prvním a druhým kulovým rozhraním vyšetříme postupně* (obr. R7)

Vyjdeme ze zobrazovací rovnice kulového rozhraní o poloměru $R$, které odděluje dvě prostředí o indexech lomu $n_1$, $n_2$, ze vztahu pro výpočet předmětové ohniskové vzdálenosti a vztahu pro výpočet příčného zvětšení $\beta$:

$$n_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a}\right) = n_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a'}\right), \quad f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}, \quad \beta = -\frac{f}{a - f}\,.$$

Vzhledem ke znaménkové konvenci bereme oba poloměry kulových rozhraní jako záporné.

1. rozhraní: $R = -\frac{5}{4}r$, $n_1 = 1$, $n_2 = n = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{r}{2}$.

$$1 \cdot \left(-\frac{4}{5r} + \frac{2}{r}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5r} - \frac{1}{a_1'}\right) \quad \Rightarrow \quad a_1' = -\frac{5}{8}r = -3{,}125\ \text{cm}\,,$$

$$f_1 = \frac{1 \cdot \left(-\frac{5}{4}r\right)}{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}r = -12{,}5\ \text{cm}\,, \quad \beta_1 = -\frac{-\frac{5}{2}r}{\frac{1}{2}r + \frac{5}{2}r} = \frac{5}{6} = 0{,}833\,.$$

**4 body**

2. rozhraní: $R = -r$, $n_2 = 1$, $n_1 = n = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5r}{8} + \frac{r}{2} = \frac{9}{8}r$.

$$\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{r} + \frac{8}{9r}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{a_2'}\right) \quad \Rightarrow \quad a_2' = -\frac{6}{5}r = -6\ \text{cm}\,,$$

$$f_2 = \frac{\frac{3}{2} \cdot (-r)}{-\frac{1}{2}} = 3r = 15\ \text{cm}\,, \quad \beta_2 = -\frac{3r}{\frac{9}{8}r - 3r} = \frac{8}{5} = 1{,}6\,.$$

**4 body**

Výsledné příčné zvětšení je $\beta = \beta_1\beta_2 = \frac{4}{3}$. Výsledný obraz tedy leží před čočkou, je zdánlivý, vzpřímený a zvětšený. **1 bod**

*2. způsob řešení — použijeme zobrazovací rovnici tlusté čočky* (obr. R8).

Parametry tlusté čočky jsou $R_1 = -\frac{5}{4}r$, $R_2 = -r$, $d = \frac{r}{2}$, $n_1 = 1$, $n_2 = \frac{3}{2}$.

Nejprve určíme ohniskovou vzdálenost a polohu hlavních bodů:

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = \frac{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}r\right) \cdot (-r)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{4}\right)} = 6r = 30 \text{ cm},$$

$$a_1(H) = \frac{n_1 R_1 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{1 \cdot \left(-\frac{5}{4}r\right) \cdot \frac{r}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{4}} = -r = -5 \text{ cm}\,,$$

$$a_2'(H') = -\frac{n_1 R_2 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{1 \cdot (-r) \cdot \frac{r}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{4}} = -\frac{4}{5}r = -4 \text{ cm}\,.$$

**4 body**

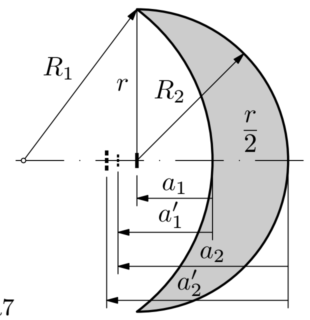
Pak použijeme Gaussovu zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}\,, \quad \text{kde} \quad a = a_1 - a_1(H) = \frac{3}{2}r\,.$$

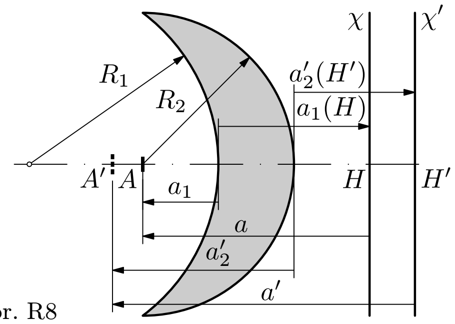
Z toho $\quad a' = \dfrac{af}{a - f} = \dfrac{\frac{3r}{2} \cdot 6r}{-\frac{9r}{2}} = -2r\,, \quad a_2' = a' - a_2'(H') = -\dfrac{6}{5}r = -6 \text{ cm}\,.$

**4 body**

Příčné zvětšení obrazu je $\beta = -\dfrac{a'}{a} = \dfrac{4}{3}\,.$ **1 bod**




Obr. R7




Obr. R8