Řešení úloh krajského kola 49. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 3, 4,) a T. Denkstein (2)

1. a)

A: $t_\mathrm{A} = \dfrac{s}{v_\mathrm{A1}} + \dfrac{s}{v_\mathrm{A2}} + \dfrac{s}{v_\mathrm{A3}} = 2\,963\ \mathrm{s} = 49 : 23\ \mathrm{min}$, pořadí 4.

B: $t_\mathrm{B} = \dfrac{2s}{v_\mathrm{B12}} + \dfrac{s}{v_\mathrm{B3}} = 2\,955\ \mathrm{s} = 49 : 15\ \mathrm{min}$, pořadí 3.

C: $t_\mathrm{C} = \dfrac{s}{v_\mathrm{C1}} + \dfrac{2s}{v_\mathrm{C23}} = 2\,938\ \mathrm{s} = 48 : 58\ \mathrm{min}$, pořadí 1.

D: $t_\mathrm{D} = \dfrac{3s}{v_\mathrm{D}} = 2\,943\ \mathrm{s} = 49 : 03\ \mathrm{min}$, pořadí 2.

4 body

b) Každou průměrnou rychlost vyjádříme jako podíl celkové dráhy a součtu časů na jednotlivých úsecích.

$$v_\mathrm{A} = \frac{3s}{\dfrac{s}{v_\mathrm{A1}} + \dfrac{s}{v_\mathrm{A2}} + \dfrac{s}{v_\mathrm{A3}}} = \frac{3v_\mathrm{A1}v_\mathrm{A2}v_\mathrm{A3}}{v_{\mathrm{A}_1}v_\mathrm{A2} + v_\mathrm{A1}v_\mathrm{A3} + v_\mathrm{A2}v_\mathrm{A3}} = 31{,}82\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,,$$

$$v_\mathrm{B} = \frac{3s}{\dfrac{2s}{v_\mathrm{B12}} + \dfrac{s}{v_\mathrm{B3}}} = \frac{3v_\mathrm{B12}v_\mathrm{B3}}{v_\mathrm{B12} + 2v_\mathrm{B3}} = 31{,}91\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,,$$

$$v_\mathrm{C} = \frac{3s}{\dfrac{s}{v_\mathrm{C1}} + \dfrac{2s}{v_\mathrm{C23}}} = \frac{3v_\mathrm{C1}v_\mathrm{C23}}{2v_\mathrm{C1} + v_\mathrm{C23}} = 32{,}09\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

6 bodů

2. Vlak se během brzdění pohyboval se zrychlením („zpomalením“) o velikosti

$$a = \frac{v_1 - v_2}{t_1} = 1{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

V neinerciální vztažné soustavě spojené s vlakem působila na dveře proti směru zrychlení vlaku, tj. ve směru pohybu vlaku, setrvačná síla o velikosti

$$F_\mathrm{s} = ma = 25{,}0\ \mathrm{N}$$

a proti pohybu dveří třecí síla o velikosti $F_\mathrm{t} = 21{,}0$ N. Výslednice $\boldsymbol{F}$ obou sil měla směr totožný se směrem setrvačné síly a velikost

$$F = F_\mathrm{s} - F_\mathrm{t} = 4{,}0\ \mathrm{N}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

Vlivem této síly se dveře během brzdění vlaku uvedly do rovnoměrně zrychleného pohybu vzhledem k vlaku. Velikost zrychlení dveří vzhledem k vlaku byla

$$a' = \frac{F}{m} = 0{,}20\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

Dveře rovnoměrně zrychleným pohybem urazily vzhledem k vlaku dráhu

$$s_1' = \frac{1}{2}a' t_1^2 = 0{,}40\ \mathrm{m} \qquad \textbf{1 bod}$$

a získaly vzhledem k vlaku rychlost o velikosti

$$v' = a' t_1 = 0{,}40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

V další fázi se vlak pohyboval rovnoměrně a na dveře pohybující se vzhledem k vlaku působila pouze třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$, která je zastavila. Zrychlení dveří vzhledem k vlaku mělo velikost

$$a'' = \frac{F_\mathrm{t}}{m} = 1{,}05\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

Dveře se zastavily za dobu $t_2 = \dfrac{v'}{a''} = 0{,}38\ \mathrm{s}\,.$ **1 bod**

Za tuto dobu dveře urazily vzhledem k vlaku dráhu

$$s_2' = \frac{1}{2}a'' t_2^2 = 0{,}076\ \mathrm{m}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

Celková dráha dveří vzhledem k vlaku byla $s' = s_1' + s_2' = 0{,}48\ \mathrm{m}\,.$

Jelikož $s' < d$, dveře se nezavřely úplně, zůstala mezera šířky 0,32 m. **1 bod**

Během pohybu dveří vzhledem k vlaku urazil vlak dráhu

$$s = \left(v_1 t_1 - \frac{1}{2}a t_1^2\right) + v_2 t_2 = 50\ \mathrm{m}\,.$$

Jelikož $s < l$, dveře se zastavily ještě v tunelu a při výjezdu cestujícího z tunelu se již vzhledem k vlaku nepohybovaly. **1 bod**

3. a) Během odhodu se uplatní zákon zachování hybnosti $mv = m_0 v_1$, z něhož plyne

$$v_1 = \frac{m}{m_0} v \,. \tag{1}$$

Obdobně během záchytu se uplatní zákon zachování hybnosti

$$mv = (m + m_0) v_2 \,,$$

z něhož plyne

$$v_2 = \frac{m}{m + m_0} v \,. \tag{2}$$

Číselně $v_1 = 0{,}16\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 0{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

b) Práce vykonaná chlapcem je rovna součtu kinetických energií chlapce s vozíkem a letícího medicinbalu:

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_0 v_1^2 \,.$$

Užitím rovnice (1) a po úpravě dostaneme

$$W = \frac{m(m + m_0)}{2m_0} v^2 \,.$$

Číselně $W = 12{,}3\ \mathrm{J}$. **4 body**

c) Hledaný poměr je

$$\frac{E_\mathrm{k}}{W} = \frac{\frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2}(m + m_0) v_2^2}{\frac{m(m + m_0)}{2m_0} v^2} \,.$$

Užitím rovnic (1) a (2) a po úpravě dostaneme

$$\frac{E_\mathrm{k}}{W} = \frac{m(m + 2m_0)}{(m + m_0)^2} \,.$$

Číselně $\frac{E_\mathrm{k}}{W} = \frac{31}{256} = 0{,}12$. **4 body**

4. a) Z 3. Keplerova zákona $\frac{r_{\rm M}^3}{r_{\rm Z}^3} = \frac{T_{\rm M}^2}{T_{\rm Z}^2}$ plyne

$$r_{\rm M} = r_{\rm Z}\sqrt[3]{\frac{T_{\rm M}^2}{T_{\rm Z}^2}} = 1{,}518 r_{\rm Z} = 227 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,. \qquad (1)$$

2 body

b) Dostane-li se Země mezi Mars a Slunce, je vzájemná vzdálenost mezi Zemí a Marsem minimální $r_{\min} = r_{\rm M} - r_{\rm Z}$, bude-li Slunce mezi Zemí a Marsem, je vzájemná vzdálenost mezi Zemí a Marsem maximální $r_{\max} = r_{\rm M} + r_{\rm Z}$. Hledané doby s využitím rovnice (1) jsou

$$t_{\min} = \frac{r_{\rm M} - r_{\rm Z}}{c} = \frac{r_{\rm Z}}{c}\left(\sqrt[3]{\frac{T_{\rm M}^2}{T_{\rm Z}^2}} - 1\right) = 258\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{min}\ 18\ \mathrm{s}\,,$$

$$t_{\max} = \frac{r_{\rm M} + r_{\rm Z}}{c} = \frac{r_{\rm Z}}{c}\left(\sqrt[3]{\frac{T_{\rm M}^2}{T_{\rm Z}^2}} + 1\right) = 1\,256\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{min}\ 56\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

c) Situace nastane, jestliže Země získá před Marsem úhlový náskok $\Delta\varphi = \pi$ rad. Platí:

$$\Delta\varphi = \omega_{\rm Z} T - \omega_{\rm M} T\,,$$

kde $\omega_{\rm Z}$, $\omega_{\rm M}$ jsou úhlové rychlosti Země a Marsu. Po dosazení dostaneme rovnici

$$\pi = \frac{2\pi}{T_{\rm Z}} T - \frac{2\pi}{T_{\rm M}} T\,,$$

z níž plyne

$$T = \frac{T_{\rm M} T_{\rm Z}}{2(T_{\rm M} - T_{\rm Z})} = 393\ \mathrm{d}\,.$$

2 body

d) Z rovnosti mezi velikostí gravitační a dostředivé síly

$$m_{\rm Z} r_{\rm Z} \frac{4\pi^2}{T_{\rm Z}^2} = \frac{\varkappa M m_{\rm Z}}{r_{\rm Z}^2}$$

plyne

$$M = \frac{4\pi^2 r_{\rm Z}^3}{\varkappa T_{\rm Z}^2} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\,.$$

2 body