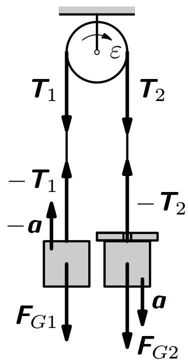
Řešení úloh krajského kola 49. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autoři úloh: R. Horáková (1), J. Jírů (2), P. Šedivý (3,4).

1. a, b) Napíšeme pohybové rovnice pro všechna tělesa. Vyjdeme přitom z obr. R1:

$$\begin{aligned}(m+m_2)a &= (m+m_2)g - T_2\,, &(1)\\ ma &= T_1 - mg\,, &(2)\\ J\varepsilon &= T_2 r - T_1 r\,. &(3)\end{aligned}$$



Obr. R1

Rovnici (3) upravíme:

$$\frac{m_1 r^2}{2}\cdot\frac{a}{r}(T_2 - T_1)r\,,$$

$$m_1 a = 2(T_2 - T_1)\,. \qquad (4)$$

4 body

Řešením soustavy rovnic (1), (2) a (4) určíme hledané veličiny:

$$a = 2g\frac{m_2}{4m + 2m_2 + m_1} = 0{,}417\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

$$T_2 = g\frac{(m+m_2)(4m+m_1)}{4m + 2m_2 + m_1} = 20{,}7\ \mathrm{N}\,.$$

$$T_1 = mg\frac{4m + 4m_2 + m_1}{4m + 2m_2 + m_1} = 20{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

3 body

c) Použijeme vztah pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$h = \frac{1}{2}at^2\,, \quad \text{odtud} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{h(4m + 2m_2 + m_1)}{m_2 g}} = 2{,}19\ \mathrm{s}\,.$$

1 bod

d) Rychlost dopadu určíme ze vztahu:

$$v = at = 2\sqrt{\frac{ghm_2}{4m + 2m_2 + m_1}} = 0{,}914\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

1 bod

e) Kinetická energie kladky je dána vztahem:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1ah = \frac{ghm_1m_2}{4m+2m_2+m_1} = 0{,}209\ \mathrm{J}\,.$$

1 bod

Jiný způsob řešení:

d) Vyjdeme ze zákona zachování energie. Úbytek potenciální energie soustavy je roven její kinetické energii při dopadu pravého závaží:

$$m_2gh = \frac{1}{2}(2m+m_2)v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(2m+m_2)v^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1r^2}{2}\omega^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(2m+m_2)v^2 + \frac{1}{4}m_1v^2\,.$$

Z toho

$$v = 2\sqrt{\frac{m_2gh}{4m+2m_2+m_1}} = 0{,}914\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

4 body

a, c) Platí $h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{vt}{2} = \frac{v^2}{2a}$. Z toho

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{2m_2g}{4m+2m_2+m_1} = 0{,}417\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,,$$

$$t = \frac{2h}{v} = \sqrt{\frac{h(4m+2m_2+m_1)}{m_2g}} = 2{,}19\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

b) Z pohybových rovnic

$$ma = T_1 - mg, \qquad (m+m_2)a = (m+m_2)g - T_2$$

dostaneme

$$T_1 = m(a+g) = mg\frac{4m+4m_2+m_1}{4m+2m_2+m_1} = 20{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

$$T_2 = (m+m_2)(g-a) = (m+m_2)g\frac{4m+m_1}{4m+2m_2+m_1} = 20{,}7\ \mathrm{N}\,.$$

3 body

e) Kladka získá kinetickou energii

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}m_1v^2 = \frac{ghm_1m_2}{4m+2m_2+m_1} = 0{,}209\ \mathrm{J}\,.$$

1 bod

2. a) Velikost rychlosti padajícího tělesa ve vzduchu se ustálí, když se velikost odporové síly vyrovná velikosti tíhové síly tělesa. Koule s 2násobným poloměrem má 4krát větší obsah příčného řezu a 8krát větší hmotnost než první koule, tudíž k vyrovnání velikosti tíhové a odporové síly dojde u větší koule při větší rychlosti. Proto při společném pádu dopadne na zemský povrch dříve větší koule, tj. koule s poloměrem $2R$.

2 body

b) V konečné fázi letu soustavy těles nastane rovnost mezi velikostí celkové tíhové síly a velikostí celkové odporové síly:

$$\varrho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g + \varrho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi(2R)^3 \cdot g = \frac{1}{2}C \cdot \pi R^2 \cdot \varrho v^2 + \frac{1}{2}C \cdot \pi(2R)^2 \cdot \varrho v^2 \,.$$

Po zjednodušení obou stran rovnice dostaneme

$$12\pi R^3 \varrho_0 g = \frac{5}{2}C\pi R^2 \varrho v^2$$

a vyjádříme hledanou velikost rychlosti:

$$v = \sqrt{\frac{24R\varrho_0 g}{5C\varrho}} \tag{1}$$

Číselně vychází $v = 81\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **4 body**

c) Vlákno je napínáno výslednicí tíhové a odporové síly působící na každou kouli. Pro její velikost platí

$$F = \varrho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi(2R)^3 \cdot g - \frac{1}{2}C \cdot \pi(2R)^2 \cdot \varrho v^2$$

a také

$$F = \frac{1}{2}C \cdot \pi R^2 \cdot \varrho v^2 - \varrho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g \,.$$

Dosadíme-li do první či druhé rovnice vztah (1), po úpravách dostaneme

$$F = \frac{16}{15}\pi R^3 \varrho_0 g \,.$$

Číselně vychází $F = 2{,}4\ \mathrm{N}$. **4 body**

3. a) Změní-li se teplota soustavy, musí být změna objemu nádoby stejná jako změna objemu výplně:

$$a_1^3 \cdot 3\alpha_1 \Delta t = b_1^3 \cdot 3\alpha_2 \Delta t \,,$$

kde α_1, α_2 jsou teplotní součinitele délkové roztažnosti nádoby a výplně. Z toho

$$b_1^3 = a_1^3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \,.$$

Protože $b_1 < a_1$, musí být $\alpha_1 < \alpha_2$. Je tedy materiálem nádoby ocel ($\alpha_1 = \alpha'$) a materiálem výplně hliník ($\alpha_2 = \alpha''$). Platí:

$$b_1^3 = a_1^3 \frac{\alpha'}{\alpha''} \,, \qquad V_1 = V = a_1^3 - b_1^3 = a_1^3 \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha''}\right) \,,$$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{1 - \dfrac{\alpha'}{\alpha''}}} = 121{,}4 \text{ mm} \,, \qquad b_1 = a_1 \sqrt[3]{\frac{\alpha'}{\alpha''}} = 0{,}761 a_1 = 92{,}4 \text{ mm} \,.$$

4 body

b) Změní-li se teplota soustavy, musí být změna objemu petroleje rovna rozdílu změny objemu nádoby a výplně:

$$V_1 \beta \Delta t = (c_1^3 - d_1^3)\beta \Delta t = c_1^3 \cdot 3\alpha_3 \Delta t - d_1^3 \cdot 3\alpha_4 \Delta t \,,$$

kde α_3, α_4 jsou teplotní součinitele délkové roztažnosti nádoby a výplně. Z toho

$$c_1^3(\beta - 3\alpha_3) = d_1^3(\beta - 3\alpha_4) \,, \qquad d_1^3 = c_1^3 \frac{\beta - 3\alpha_3}{\beta - 3\alpha_4} \,.$$

Protože $d_1 < c_1$, musí být materiálem nádoby hliník ($\alpha_3 = \alpha''$) a materiálem výplně ocel ($\alpha_4 = \alpha'$). Platí:

$$d_1^3 = c_1^3 \frac{\beta - 3\alpha''}{\beta - 3\alpha'} \,, \qquad V_1 = c_1^3 \left(1 - \frac{\beta - 3\alpha''}{\beta - 3\alpha'}\right) \,,$$

$$c_1 = \sqrt[3]{\frac{V_1}{1 - \dfrac{\beta - 3\alpha''}{\beta - 3\alpha'}}} = 284{,}5 \text{ mm} \,, \qquad d_1 = c_1 \sqrt[3]{\frac{\beta - 3\alpha''}{\beta - 3\alpha'}} = 280{,}3 \text{ mm} \,.$$

5 bodů

Úloha a) vede k přijatelnému výsledku. Nádoba vyrobená podle návrhu b) by byla dosti nepraktická. Celkový objem je 23 litrů, kapalina by byla uložena jen v tenké mezeře široké 4 mm.

1 bod

4. a) Na jednu elementární buňku připadají 4 atomy mědi $\left(8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2}\right)$. Objem buňky je

$$V = a^3 = \frac{4A_\mathrm{r} \cdot m_\mathrm{u}}{\varrho}\,.$$

Z toho

$$a = \sqrt[3]{\frac{4A_\mathrm{r} \cdot m_\mathrm{u}}{\varrho}} = 3{,}61 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

b) Poloměr jedné kuličky je roven čtvrtině délky stěnové úhlopříčky elementární buňky:

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{4} = 1{,}28 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 0{,}128\ \mathrm{nm}\,.$$

2 body

c) Každá vnitřní kulička modelu se dotýká dvanácti sousedních.

2 body

d) V elementární buňce kuličky zaplňují objem

$$V_1 = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6} = 0{,}74 a^3\,.$$

$$\frac{V_1}{V} = 74\ \%\,.$$

2 body