Řešení úloh 1. kola 49. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: I. Čáp (6), J. Jírů (5), M. Kapoun (1), I. Volf (3) a P. Šedivý (2, 7).

4. úloha převzata z Moskevské regionální FO 2006.

1. a) Celkový pohyb tělíska sestává z volného pádu po dobu t_1 z výšky h a z rovnoměrného přímočarého pohybu konaného rychlostí o velikosti $v = \sqrt{2gh}$ po dobu t_2 na dráze d. Z rovnic

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2\,, \qquad v = \sqrt{2gh} = \frac{d}{t_2}\,, \qquad t = t_1 + t_2$$

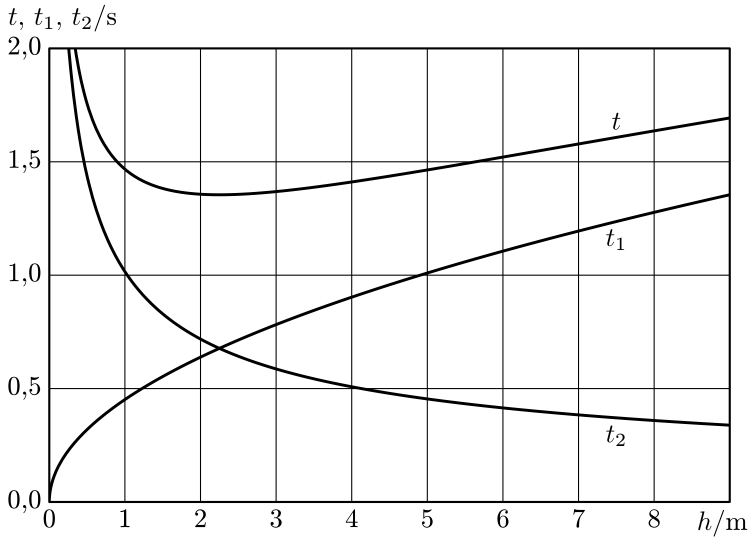
plyne

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{d}{\sqrt{2gh}}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Grafy je vhodné sestrojit pomocí počítače, pro ruční sestrojení na milimetrový papír je uvedena tabulka vybraných hodnot:

h/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_1/s	0	0,45	0,64	0,78	0,90	1,01	1,11	1,19	1,28	1,35
t_2/s	-	1,02	0,72	0,59	0,51	0,45	0,41	0,38	0,36	0,34
t/s	-	1,47	1,36	1,37	1,41	1,46	1,52	1,58	1,64	1,69



Obr. R1

4 body

c) Nahradíme-li v rovnici (1) odmocniny racionálním exponentem, dostaneme

$$t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{d^2}{2gh}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Po zavedení substituce

$$A = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{4}} , \quad B = \left(\frac{d^2}{2gh}\right)^{\frac{1}{4}}$$

výraz upravíme pro použití vzorce $A^2 + B^2 = (A - B)^2 + 2AB$:

$$t = \left[\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 + \left[\left(\frac{d^2}{2gh}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{d^2}{2gh}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 + 2\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{d^2}{2gh}\right)^{\frac{1}{4}}$$

a konečnou úpravou dostaneme

$$t = \left[\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{d^2}{2gh}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 + 2\left(\frac{d}{g}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2}$$

Poslední člen je z hlediska proměnné výšky h konstantní a druhá mocnina jakéhokoliv výrazu je minimální, když výraz je nulový. Tak v podmínce

$$\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{d^2}{2gh}\right)^{\frac{1}{4}} , \quad h > 0 , \quad d > 0$$

položíme $h = H$ a dostaneme $H = \dfrac{d}{2}$.

Za této podmínky je v rovnici (2) výraz v hranaté závorce nulový, a tedy minimální čas je

$$t_{\min} = 2\sqrt{\frac{d}{g}} .$$

Pro $d = 4{,}5$ m vychází $H = 2{,}25$ m a $t_{\min} = 1{,}35$ s . **4 body**

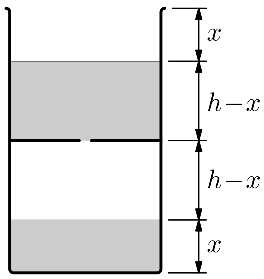
2. a) Vzduch začne probublávat otvorem v přepážce, když jeho tlak překročí tlak vody u otvoru

$$p = p_0 + (h - x)\varrho g\,.$$

Tlak vzduchu pod přepážkou se mění podle Boylova–Mariottova zákona. V okamžiku, kdy se tlaky vyrovnají, platí

$$pS(h - x) = p_0 Sh\,,$$

$$p = \frac{p_0 h}{h - x} = p_0 + (h - x)\varrho g\,,$$



Obr. R2

kde S je plošný obsah horizontálního průřezu nádoby. Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2\varrho g - (2h\varrho g + p_0)x + h^2\varrho g = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kořen

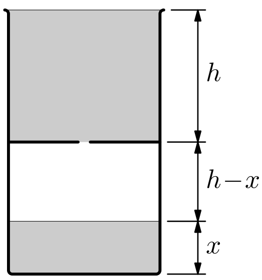
$$x = h + \frac{p_0}{2\varrho g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4h\varrho g}{p_0}}\right)\,.$$

(Druhý kořen rovnice nesplňuje podmínku $x < h$.) Pro dané hodnoty vychází $x = 83$ mm. **6 bodů**

b) Budeme-li udržovat hladinu v hodní části nádoby na původní výšce (obr. R3), bude mít tlak vody u otvoru v přepážce stálou hodnotu $p_0 + \varrho gh$. V okamžiku, kdy tlak vzduchu pod přepážkou dosáhne této hodnoty, platí

$$\frac{p_0 h}{h - x} = p_0 + \varrho gh \quad \Rightarrow \quad x = h\frac{\varrho gh}{p_0 + \varrho gh}\,.$$

Pro dané hodnoty vychází $x = 89$ mm.



Obr. R3

4 body

3. Celkovou odporovou sílu, výkon automobilu a práci vykonanou automobilem na dráze s určíme ze vztahů

$$F = 0{,}05mg + \frac{1}{2}CS\varrho v^2\,, \qquad P = Fv\,, \qquad W = Fs\,.$$

2 body

Mezi teplem Q získaným spálením benzinu a prací vykonanou automobilem je vztah

$$W = \eta Q = \eta m_\mathrm{p} H = \eta \varrho_\mathrm{p} V_\mathrm{p} H.$$

Z toho

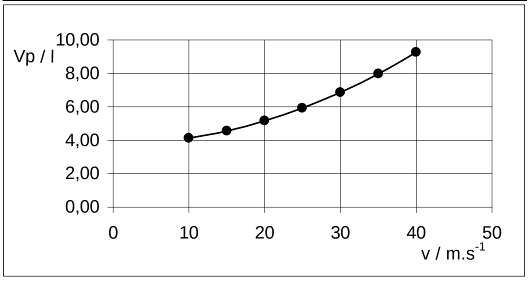
$$V_\mathrm{p} = \frac{W}{\eta \varrho_\mathrm{p} H}\,.$$

2 body

S užitím uvedených vztahů byla vyplněna tabulka v Excelu **3 body**

a sestrojen graf. **3 body**

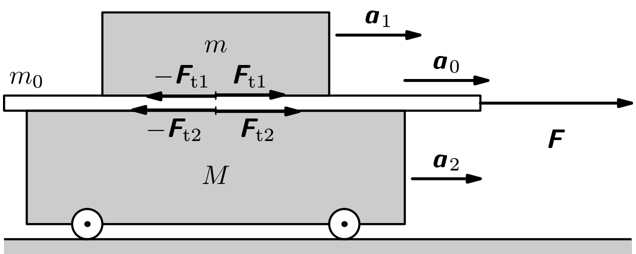
v/m.s^{-1}	F/N	P/kW	W/MJ	V_p/l
10	492	4,9	49	4,13
15	543	8,1	54	4,55
20	614	12,3	61	5,15
25	706	17,7	71	5,92
30	818	24,6	82	6,86
35	951	33,3	95	7,98
40	1104	44,2	110	9,26



4. Proberme nejprve síly, které působí na tělesa ve svislém směru. Na kvádr působí tíhová síla a reakce listu papíru stejné velikosti mg. Na list papíru působí tíhová síla velikosti m_0g, tíha kvádru velikosti mg a reakce vozíku velikosti $(m+m_0)g$. Na vozík působí tíhová síla velikosti Mg, tíha kvádru a listu papíru velikosti $(m+m_0)g$ a reakce stolu velikosti $M+m+m_0)g$.

Ve směru pohybu působí list papíru na kvádr silou tření $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}1}$ a na vozík silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}2}$. Na list papíru působí ve směru pohybu síla $\boldsymbol{F}$ a proti směru pohybu třecí síly $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}1}$ od kvádru a $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}2}$ od vozíku (obr. R3).

Pro velikosti sil tření platí: $F_{\mathrm{t}1} \leq fmg$, $F_{\mathrm{t}2} \leq f(m+m_0)g$, přičemž rovnost nastane, jen když se povrchy těles po sobě smýkají. Jinak platí nerovnost.



Obr. R3

a,b) Mohou nastat tyto možnosti:

1. *Kvádr klouže po papíru a papír klouže po vozíku.* Pak

$$F_{\mathrm{t}1} = fmg\,, \quad F_{\mathrm{t}2} = f(m+m_0)g\,, \quad a_1 = \frac{fmg}{m} = fg\,,$$

$$a_2 = \frac{f(m+m_0)g}{M}\,, \quad a_0 = \frac{F - fmg - f(m+m_0)g}{m_0}\,.$$

Protože $m < M$ a $m_0 \ll m$, platí $a_1 > a_2$. Z předpokladu o klouzání kvádru plyne $a_0 > a_1$ tedy

$$\frac{F - fmg - f(m+m_0)g}{m_0} > fg \quad \Rightarrow \quad F > 2f(m+m_0)g\,.$$

2. *Kvádr neklouže po papíru a papír klouže po vozíku.* Pak $F_{\mathrm{t}2} = f(m+m_0)g$,

$$a_0 = a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{F - F_{\mathrm{t}1} - f(m+m_0)g}{m_0} = \frac{F_{\mathrm{t}1}}{m}\,,$$

$$F_{\mathrm{t}1}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_0}\right) = F_{\mathrm{t}1}\frac{m+m_0}{mm_0} = \frac{F - f(m+m_0)g}{m_0}\,,$$

$$F_{\mathrm{t}1} = \frac{F - f(m+m_0)g}{m+m_0}m < fmg \quad \Rightarrow \quad F < 2f(m+m_0)g\,.$$

Současně platí

$$a_1 > a_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F - f(m+m_0)g}{m+m_0} > \frac{f(m+m_0)g}{M}\,,$$

$$F > f(m+m_0)g\left(\frac{1}{m+m_0} + \frac{1}{M}\right) = f(m+m_0)g\left(1 + \frac{m+m_0}{M}\right)\,.$$

Druhý případ tedy nastane, jestliže

$$f(m+m_0)g\left(1 + \frac{m+m_0}{M}\right) < 2f(m+m_0)g.$$

Pokud by platila rovnost $F = 2f(m+m_0)g,$ kvádr právě začíná nepatrně klouzat po papíru.

3. *Papír neklouže po vozíku a kvádr klouže po papíru.* Pak $a_0 = a_2 > a_1$. Současně by muselo platit

$$F_{\mathrm{t1}} = fmg\,, \quad a_1 = \frac{F_{\mathrm{t1}}}{m} = fg\,, \quad F_{\mathrm{t2}} < f(m+m_0)g\,,$$

$a_2 < \dfrac{f(m+m_0)g}{M} < fg = a_1$, neboť $\dfrac{m+m_0}{M} < 1$. Tím jsme ale došli ke sporu s výchozím předpokladem. Uvažovaná situace při daných hmotnostech těles nemůže nastat.

4. *Kvádr neklouže po papíru a papír neklouže po vozíku.* Pak

$$a_0 = a_1 = a_2 = \frac{F}{m+m_0+M} = \frac{F_{\mathrm{t1}}}{m} = \frac{F_{\mathrm{t2}}}{M}\,,$$

$$F_{\mathrm{t2}} = F\frac{M}{m+m_0+M} < f(m+m_0)g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F < f(m+m_0)g\left(1 + \frac{m+m_0}{M}\right)\,.$$

Pokud by platila rovnost $F = f(m+m_0)g\left(1 + \dfrac{m+m_0}{M}\right)$, papír právě začíná nepatrně klouzat po vozíku.

Shrnutí: Kvádr je vzhledem k listu papíru v klidu, jestliže $F < 2(m+m_0)g$. Vozík je vzhledem k listu papíru v klidu, jestliže

$$F < f(m+m_0)g\left(1 + \frac{m+m_0}{M}\right).$$

6 bodů

c) Pro dané hodnoty dostáváme

$$2f(m+m_0)g = 13{,}8\ \mathrm{N},\ f(m+m_0)g\left(1 + \frac{m+m_0}{M}\right) = 9{,}2\ \mathrm{N}.$$

Jestliže $F = 3\ \mathrm{N}$, nastane čtvrtá situace. Všechna tři tělesa se pohybují se stejným zrychlením o velikosti $a_0 = a_1 = a_2 = 0{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jestliže $F = 11\ \mathrm{N}$, nastane druhá situace. Papír se závažím kloužou po vozíku se zrychlením $a_0 = a_1 = \dfrac{F - f(m+m_0)g}{m+m_0} = 4{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

4 body

5. a) Označme R poloměr planety, R_z poloměr Země, M hmotnost planety a M_z hmotnost Země. Pak platí

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{5M_\mathrm{z}}{\frac{4}{3}\pi(1{,}5R_\mathrm{z})^3} = \frac{5}{1{,}5^3}\cdot\frac{M_\mathrm{z}}{\frac{4}{3}\pi R_\mathrm{z}^3} = 1{,}5\varrho_\mathrm{z}\,.$$

2 body

b) Gravitační síla působící na těleso o hmotnosti m na povrchu planety je

$$ma_\mathrm{g} = \varkappa\frac{mM}{R^2}\,.$$

Úpravami dostaneme

$$a_\mathrm{g} = \varkappa\frac{M}{R^2} = \varkappa\frac{5M_\mathrm{z}}{(1{,}5R_\mathrm{z})^2} = \frac{5}{1{,}5^2}\cdot\varkappa\frac{M_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}^2} = 2{,}2a_\mathrm{gz}\,.$$

2 body

c) Z rovnosti mezi velikostí dostředivé a gravitační síly pro těleso o hmotnosti m obíhající po kružnici bezprostředně při povrchu planety kruhovou rychlostí o velikosti v_k

$$m\frac{v_\mathrm{k}^2}{R} = \varkappa\frac{mM}{R^2} \quad \text{plyne} \quad v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R}}\,,$$

Úniková rychlost je

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{k}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R}} = \sqrt{\frac{2\varkappa\cdot 5M}{1{,}5R_\mathrm{z}}} = \sqrt{\frac{5}{1{,}5}}\cdot\sqrt{\frac{2\varkappa M_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}}} = 1{,}8v_\mathrm{pz}\,.$$

3 body

d) Označme nyní r vzdálenost planety od hvězdy, r_z vzdálenost Země od Slunce, T periodu oběhu planety kolem hvězdy, $T_\mathrm{z} = 365{,}25$ dne periodu oběhu Země kolem Slunce. Z rovnosti mezi velikostí dostředivé a gravitační síly pro planetu o hmotnosti m obíhající po kružnici kolem hvězdy

$$mr\frac{4\pi^2}{T^2} = \varkappa\frac{mM}{r^2}$$

plyne

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2} = \frac{4\pi^2\left(\frac{1}{14}r_\mathrm{z}\right)^3}{\varkappa\left(\frac{13}{365{,}25}T_\mathrm{z}\right)^2} = \frac{\frac{1}{14^3}}{\frac{13^2}{365{,}25^2}}\cdot\frac{4\pi^2 r_\mathrm{z}^3}{\varkappa T_\mathrm{z}^2} = 0{,}29M_\mathrm{s}\,.$$

3 body

7. a) Při teplotě $t_1 = 80$ °C se délka stupnice, obsah vnitřního průřezu kapiláry a objem nádobky teploměru zvětší na

$$l_1 = l_0(1+\alpha t_1)\,, \quad S_1 = S_0(1+\alpha t_1)^2\,, \quad V_1 = V_0(1+\alpha t_1)^3\,.$$

Hmotnost ethanolu v teploměru je konstantní, proto

$$m = \varrho_0 V_0 = (V_0 + S_0 l_0)(1+\alpha t_1)^3 \varrho_1 = (V_0 + S_0 y_0)(1+\alpha t)^3 \varrho\,, \quad (1)$$

kde ϱ_0, ϱ_1 a ϱ jsou hustoty ethanolu při teplotách 0 °C, 80 °C a při měřené teplotě $t \in \langle 0\ °\mathrm{C}, 80\ °\mathrm{C}\rangle$ a y_0 je souřadnice bodu na stupnici, kam by vystoupila hladina ethanolu při teplotě t, měřená ale při teplotě 0 °C. Z levé části vztahu (1) odvodíme

$$V_0 = \frac{\varrho_1 S_0 l_0 (1+\alpha t_1)^3}{\varrho_0 - \varrho_1(1+\alpha t_1)^3}\,. \quad (2)$$

Pro dané hodnoty vychází $V_0 = 2{,}10916 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \approx 2{,}11\ \mathrm{cm}^3$.

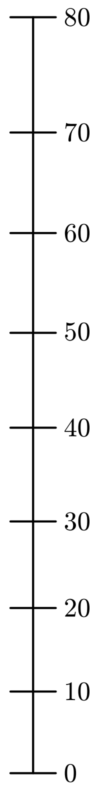
3 body

b) Ze vztahů (1) a (2) odvodíme

$$y_0 = \frac{V_0\left[\varrho_0 - \varrho(1+\alpha t)^3\right]}{S_0 \varrho (1+\alpha t)^3} = l_0 \frac{\varrho_1}{\varrho} \cdot \frac{(1+\alpha t_1)^3}{(1+\alpha t)^3} \cdot \frac{\varrho_0 - \varrho(1+\alpha t)^3}{\varrho_0 - \varrho_1(1+\alpha t_1)^3}\,. \quad (3)$$

Pomocí (3) vyplníme tabulku hodnot pro strojení stupnice (na obr. R4 je v polovičním měřítku):

t/°C	y_0/cm	y/cm	t/°C	y_0/°C	y/cm	t/°C	y_0/cm	y/cm
0	0,00	0,00	30	6,67	6,66	60	14,29	14,29
10	2,17	2,16	40	9,15	9,14	70	16,96	16,95
20	4,38	4,37	50	11,69	11,68	80	20,00	20,00



Obr. R4

4 body

c) Zanedbáme-li změny rozměrů kapiláry, tj. délku l stupnice a obsah S jejího vnitřního průřezu vezmeme jako konstanty a nebudeme rozlišovat souřadnice y_0, y bodu stupnice při teplotě 0 °C a při teplotě t, změní se vztah (1) na

$$m = \varrho_0 V_0 = \left[V_0(1+\alpha t_1)^3 + Sl\right] \varrho_1 = \left[V_0(1+\alpha t)^3 + Sy\right] \varrho\,. \quad (1')$$

Z toho

$$V_0 = \frac{\varrho_1 S l}{\varrho_0 - \varrho_1(1+\alpha t_1)^3} = 2{,}10496 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \approx 2{,}10\ \mathrm{cm}^3\,, \quad (2')$$

$$y = l \frac{\varrho_1}{\varrho} \cdot \frac{\varrho_0 - \varrho(1+\alpha t)^3}{\varrho_0 - \varrho_1(1+\alpha t_1)^3}\,. \quad (3')$$

Číselné hodnoty vypočtené pomocí zjednodušených vzorců (2') a (3') se od předcházejících liší jen nepatrně. V praxi můžeme rozdíl zanedbat.