Řešení úloh krajského kola 49. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2), P. Šedivý (4); 3. úloha je z časopisu Kvant.

1. a) Ze zákona zachování hybnosti plyne

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

kde u_1, u_2 vyjadřují x-ové souřadnice rychlostí po první srážce. Podle zákona zachování mechanické energie můžeme psát

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2,$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} m_1(v - u_1) &= m_2 u_2, \\ m_1(v^2 - u_1^2) &= m_2 u_2^2. \end{aligned}$$

Po vydělení druhé rovnice první rovnicí dostaneme

$$v + u_1 = u_2,$$

po dosazení do první rovnice pak je

$$m_1(v - u_1) = m_2(v + u_1),$$

z čehož $u_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v = \dfrac{m_1 - km_1}{m_1 + km_1}v = \dfrac{1-k}{1+k}v,$

potom $u_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}v = \dfrac{2}{1+k}v.$

Pro dané hodnoty:

1. $k = \dfrac{1}{2}$: $u_1 = \dfrac{1}{3}v = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $u_2 = \dfrac{4}{3}v = 4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$;

2. $k = 2$: $u_1 = -\dfrac{1}{3}v = -1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $u_2 = \dfrac{2}{3}v = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

3 body

b) Vozíky se po odrazu druhého vozíku od koncového dorazu k sobě určitě přibližují, jestliže $u_1 \geq 0$, tj. $k \leq 1$. Pokud je $u_1 < 0$, tj. $k > 1$, musí platit

$$|u_2| > |u_1| \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{k+1} > \frac{k-1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad k < 3\,.$$

3 body

c) Platí $l_0 = u_2 t$, z čehož $t = \dfrac{l_0}{u_2}$ je doba od srážky do nárazu 2. vozíku na doraz.

První vozík za tuto dobu urazí z místa srážky vzdálenost $d = u_1 t = \dfrac{u_1}{u_2}l_0$.

V okamžiku nárazu druhého vozíku na stěnu je vzdálenost mezi vozíky

$$b = l_0 - d = l_0 - \frac{u_1}{u_2} l_0 = \left(1 - \frac{1-k}{2}\right) l_0 = \frac{1+k}{2} l_0 .$$

Určíme dobu t' (měřenou od doby nárazu 2. vozíku na doraz), za kterou dojde k další srážce:

$$t' = \frac{b}{u_2 + u_1} = \frac{\dfrac{1+k}{2} l_0}{\left(\dfrac{2}{1+k} + \dfrac{1-k}{1+k}\right) v} = \frac{(1+k)^2}{2(3-k)} \frac{l_0}{v} .$$

Vzdálenost l od zarážky, kdy dojde ke druhé srážce, je pak dána vztahem

$$l = u_2 t' = \frac{2}{1+k} v \frac{(1+k)^2}{2(3-k)} \frac{l_0}{v} = \frac{1+k}{3-k} l_0 .$$

Pro dané hodnoty:

1. Pro $k = \dfrac{1}{2}$: $l = \dfrac{3}{5} l_0 = 18$ cm,

2. Pro $k = 2$: $l = 3 l_0 = 90$ cm.

4 body

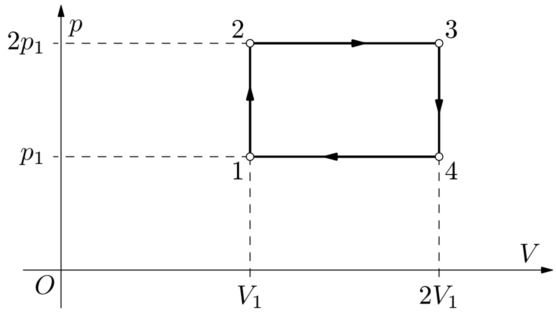
Poznámka: Úlohu b) je tké možno řešit na základě podmínky, aby hodnoty t', l (stačí jedna z nich) byly kladné a konečné, tj. aby platilo $3 - k > 0$, z čehož dostaneme již dříve uvedenou podmínku $k < 3$.

2. a) Děj 1 – 2 je izochorický, $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$; děj 2 – 3, izobarický $p_2 = p_3$; děj 3 – 4 izochorický, $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4}$; děj 4 – 1 izobarický, $p_4 = p_1$. **2 body**

b) Ze vztahů a) můžeme psát $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_3}{T_2}$, z čehož $\frac{p_1}{p_3} = \frac{T_1}{T_2}$. Dále také $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_1}{T_2}$, z čehož $\frac{p_1}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}$. Porovnáním vztahů pro $\frac{p_1}{p_3}$ dostaneme $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3}$, z čehož $T_2 = \sqrt{T_1 \cdot T_3}$, dále užijeme vztah $T_3 = 4T_1$ a dostaneme $T_2 = 2T_1 = T_4$.
2 body

c) Vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru $pV = nRT$.
1: $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 0{,}023\ \mathrm{m}^3, \quad p_1 = 0{,}1\ \mathrm{MPa}.$
2: $V_2 = V_1; \quad p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 2p_1 = 0{,}2\ \mathrm{MPa}.$
3: $p_3 = p_2 = 2p_1 = 0{,}2\ \mathrm{MPa}; \quad V_3 = \frac{T_3}{T_2} V_2 = 2V_1 = 0{,}045\ \mathrm{m}^3.$
4: $p_4 = p_1; \quad V_4 = \frac{T_4}{T_1} V_1 = 2V_1 = V_3 = 0{,}045\ \mathrm{m}^3.$ **2 body**

d) Graf je znázorněn na obr. R1



Obr. R1

2 body

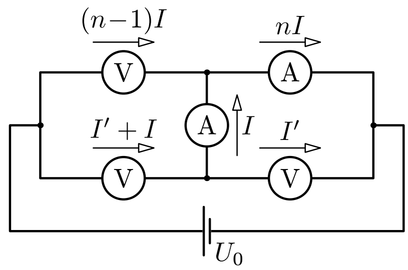
e) Práce vykonaná plynem při kruhovém ději je dána vztahem
$W' = (p_2 - p_1) \cdot (V_3 - V_2) = p_1 V_1 = nRT_1 = 2270\ \mathrm{J}.$ **1 bod**

f) Dodané teplo $Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + W'_{23}$

$$Q_1 = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) + \frac{5}{2} nR(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2) =$$
$$= \frac{5}{2} V_1(2p_1 - p_1) + \frac{5}{2} 2p_1(2V_1 - V_1) + 2p_1(2V_1 - V_1) = 9{,}5 p_1 V_1.$$

Účinnost je pak dána vztahem $\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{p_1 V_1}{9{,}5 p_1 V_1} = \frac{1}{9{,}5} = 10{,}5\ \%.$
1 bod

3.a) Vzhledem k polaritě zdroje a vzhledem k tomu, že odpor voltmetru je větší než odpor miliampérmetru, můžeme předpokládat, že proudy ve větvích sítě budou mít směry vyznačené na obr. R2. Proud procházející miliampérmetrem v diagonále můstku označme I. Druhým miliampérmetrem prochází proud větší o proud horního voltmetru. Podle předpokladu úlohy má velikost nI a horním voltmetrem prochází podle 1. Kirchhoffova zákona proud $(n-1)I$. Proudy procházející zbývajícími voltmetry označme v souladu s 1. Kirchhoffovým zákonem I' a $I'+I$.



Obr. R2

Označme R_V, R_A odpory voltmetru a miliampérmetru. Podle 2. Kirchhoffova zákona

$$(I'+I)R_V + IR_A = (n-1)IR_V\,, \tag{1}$$

$$I'R_V = IR_A + nIR_A\,. \tag{2}$$

3 body

Dosazením za $I'R_V$ z (2) do (1) a úpravou dostaneme

$$(n+2)IR_A = (n-2)IR_V \quad \Rightarrow \quad \frac{R_V}{R_A} = \frac{n+2}{n-2} = 5\,.$$

Jednotlivými voltmetry procházejí proudy

$$(n-1)I = \frac{(n-1)(n+2)}{n+2}I = 2I\,,$$

$$I' = I(n+1)\frac{R_A}{R_V} = \frac{(n+1)(n-2)}{n+2}I = \frac{4}{5}I\,,$$

$$I'+I = \left(\frac{(n+1)(n-2)}{n+2}+1\right)I = \frac{n^2}{n+2}I = \frac{9}{5}I\,.$$

Napětí na voltmetrech jsou tedy v poměru

$$U_1 : U_2 : U_3 = (n-1)(n+2) : (n+1)(n-2) : n^2 = 10 : 4 : 9\,.$$

4 body

Řešením soustavy rovnic

$$U_2 + U_3 = U_0\,, \qquad U_2 : U_3 = (n+1)(n-2) : n^2$$

dostaneme

$$U_3 = \frac{n^2}{(n+1)(n-2)+n^2}U_0 = \frac{9}{13}U_0 = 0{,}9\ \mathrm{V}\,,$$

$$U_2 = \frac{(n+1)(n-2)}{(n+1)(n-2)+n^2}U_0 = \frac{4}{13}U_0 = 0{,}4\ \mathrm{V}\,.$$

Zbývající napětí je

$$U_1 = \frac{(n-1)(n+2)}{n^2}U_3 = \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n-2)+n^2}U_0 = \frac{10}{13}U_0 = 1\,\mathrm{V}\,.$$

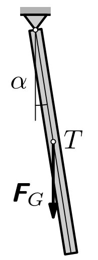
3 body

4. a) Na tyč vychýlenou o malý úhel α z rovnovážné polohy (obr. R3) působí tíhová síla momentem

$$M = -mg\frac{l}{2}\sin\alpha \approx -\frac{mgl}{2}\alpha = -D\alpha$$

namířeným proti okamžité výchylce. Kyvadlo kývá s periodou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1{,}16\ \mathrm{s}\,.$$



Obr. R3

3 body

b) V rovnovážné poloze tyče se síly, kterými působí pružiny na její konec, ruší. Vychýlíme-li tyč o malý úhel α, jedna pružina se zkrátí a druhá se prodlouží o $l\sin\alpha$. Síla jedné pružiny se zvětší a druhé pružiny zmenší o $k\cdot l\sin\alpha$. Výsledná síla, kterou pružiny působí na konec tyče, má velikost $F_\mathrm{p} = 2kl\sin\alpha$ a je namířena proti okamžité výchylce (obr. R4). Celkový moment sil působících na tyč je

$$M = -mg\frac{l}{2}\sin\alpha - 2kl\sin\alpha\cdot l\cos\alpha \approx -\left(\frac{mgl}{2} + 2kl^2\right)\alpha = -D'\alpha$$

a kyvadlo kývá s periodou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D'}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{\frac{mgl}{2} + 2kl^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2ml}{3mg + 12kl}}\,.$$

Podle zadání úlohy je

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 0{,}58\ \mathrm{s}\,.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{2ml}{3mg + 12kl} = \frac{2l}{3g}\cdot\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad k = \frac{3mg}{4l} = 3{,}7\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.$$

4 body

c) U převrácené soustavy působí moment tíhové síly ve směru výchylky z rovnovážné polohy (obr. R5). Výsledný moment je

$$M = -2kl\sin\alpha\cdot l\cos\alpha + mg\frac{l}{2}\sin\alpha \approx -\left(2kl^2 - \frac{mgl}{2}\right)\alpha = -D''\alpha\,.$$

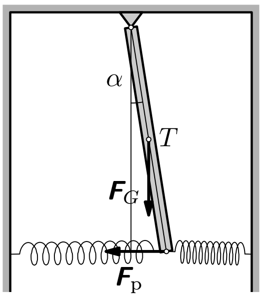
V našem případě

$$D'' = 2 \cdot \frac{3mg}{4l} \cdot l^2 - \frac{mgl}{2} = mgl > 0\,.$$

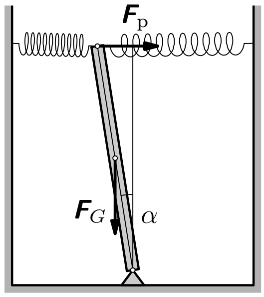
(Pokud by platilo $k \leq \dfrac{mg}{4l}$, direkční moment by byl nulový či záporný a ke kmitání by nedošlo.) Soustava kmitá s periodou

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D''}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}} = 0{,}82\ \mathrm{s}\,.$$

3 body



Obr. R4



Obr. R5