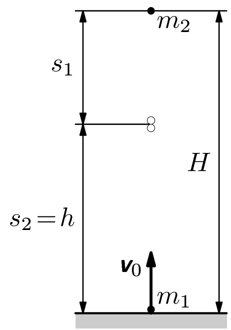
Řešení úloh 1. kola 49. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 4, 5), P. Šedivý (3, 7) a V. Koubek (6).

1. a) Označme h výšku nad zemí, kde dojde ke srážce. Spodní kulička dopadne na zem rychlostí o velikosti $v_0 = \sqrt{2Hg}$ a od země se odrazí stejně velkou rychlostí. V tomto okamžiku začne padat volným pádem svisle dolů také druhá kulička (obr. R1). Platí



Obr. R1

$$s_1 = \frac{1}{2}gt^2, \quad s_2 = h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad H = s_1 + s_2,$$

kde t je čas, kdy dojde ke srážce, měřený od počátku pohybu horní kuličky. Sečtením vztahů pro s_1 a s_2 dostaneme

$$H = v_0 t.$$

Odtud $t = \dfrac{H}{v_0} = \dfrac{H}{\sqrt{2Hg}} = \sqrt{\dfrac{H}{2g}}$.

Po dosazení do vztahu pro h dostaneme $h = \dfrac{3}{4}H$.

V okamžiku srážky má rychlost 1. kuličky velikost $v_1 = \sqrt{2Hg} - g\sqrt{\dfrac{H}{2g}} = \sqrt{\dfrac{Hg}{2}}$,

rychlost 2. kuličky má velikost $v_2 = g\sqrt{\dfrac{H}{2g}} = \sqrt{\dfrac{Hg}{2}} = v_1$.

Kuličky se srazí stejně velkými rychlostmi.

3 body

b) Zvolme vztažnou soustavu tak, že osa y je orientována vzhůru. Bezprostředně před srážkou mají rychlosti $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ kuliček souřadnice $v_{1y} = v_1$, $v_{2y} = -v_1$. Označme dále $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ (index 1 je pro kuličku m_1, index 2 pro kuličku m_2) rychlosti obou kuliček po srážce a u_1, u_2 jejich ypsilonové souřadnice. Podle zákona zachování hybnosti platí

$$m_1 v_1 - m_2 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \tag{1}$$

Užitím zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2. \tag{2}$$

Soustavu rovnic (1) a (3) můžeme přepsat na tvar

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 + v_1), \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_1^2). \end{aligned}$$

Po vydělení druhé rovnice první rovnicí dostaneme

$$v_1 + u_1 = u_2 - v_1. \tag{3}$$

Řešením soustavy rovnic (1), (3) dostaneme

$$u_1 = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{k-3}{1+k} v_1 \,, \qquad u_2 = -\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{3k-1}{1+k} v_1 \,.$$

Vyjdou-li souřadnice u_1, u_2 kladné, pak se jedná o pohyb svisle vzhůru, vyjdou-li záporné, pak se jedná o pohyb svisle dolů.

4 body

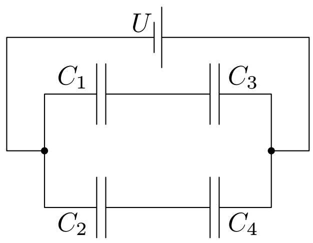
c) Pro $k = \frac{1}{2}$ je $u_1 = -\frac{5}{3} v_1$ ... směr svisle dolů, $u_2 = \frac{1}{3} v_1$ ... směr svisle vzhůru. Výška výstupu druhé kuličky je $h' = h + \frac{u_2^2}{2g} = h + \frac{H}{36} = \frac{7}{9} H$.

Pro $k = 3$ je $u_1 = 0$ ... se kulička zastaví (pak padá volným pádem), $u_2 = 2v_1$ ... směr svisle vzhůru. Výška výstupu druhé kuličky je $h' = h + \frac{u_2^2}{2g} = h + H = \frac{7}{4} H = 1{,}75 H$.

Pro $k = 10$ je $u_1 = \frac{7}{11} v_1$ ... směr svisle vzhůru, $u_2 = \frac{29}{11} v_1$ ... směr svisle vzhůru. Výška výstupu druhé kuličky je $h' = h + \frac{u_2^2}{2g} = h + \frac{841}{484} H = \frac{301}{121} H \approx 2{,}5 H$.

3 body

2. a) Je-li spínač S rozepnut, můžeme schéma zapojení kondenzátorů překreslit podle obr. R2. Pak určíme celkovou kapacitu kondenzátorů v obvodu.



Obr. R2

V horní větvi je celková kapacita obou kondenzátorů C' dána vztahem

$$C' = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{3}{4} C_1.$$

V dolní větvi je celková kapacita obou kondenzátorů C'' dána vztahem

$$C'' = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \frac{4}{3} C_1.$$

Celková kapacita obvodu C je pak dána vztahem

$$C = C' + C'' = \frac{25}{12} C_1.$$

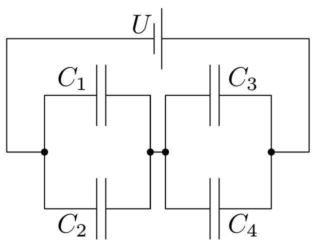
Náboj na kondenzátorech v horní větvi je $Q' = C'U = \frac{3}{4}C_1U$, v dolní větvi $Q'' = C''U = \frac{4}{3}C_1U$. Celkový náboj je $Q = CU = \frac{25}{12}C_1U$. Na kondenzátorech C_1 a C_3 je tedy náboj $Q' = \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 24\ \mathrm{C} = 180\ \mu\mathrm{C}$, na kondenzátorech C_2 a C_4 je náboj $Q'' = \frac{4}{3} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 24\ \mathrm{C} = 320\ \mu\mathrm{C}$.

3 body

Napětí na kondenzátoru C_1 je $U_1 = \frac{Q'}{C_1} = \frac{3}{4}U = 18\ \mathrm{V}$, na kondenzátoru C_3 je $U_3 = \frac{Q'}{C_3} = \frac{1}{4}U = 6\ \mathrm{V}$, na kondenzátoru C_2 je napětí $U_2 = \frac{Q''}{C_2} = \frac{2}{3}U = 16\ \mathrm{V}$, na kondenzátoru C_4 je napětí $U_4 = \frac{Q''}{C_4} = \frac{1}{3}U = 8\ \mathrm{V}$.

2 body

b) Je-li spínač S sepnut, můžeme schéma zapojení kondenzátorů překreslit podle obr. R3. Pak určíme celkovou kapacitu kondenzátorů v obvodu.



Obr. R3

V levé části je $C' = C_1 + C_2 = 3C_1$, v pravé části je $C'' = C_3 + C_4 = 7C_1$. Celková kapacita je

$$C = \frac{C'C''}{C' + C''} = \frac{21}{10}C_1.$$

Celkový náboj v levé části je stejně velký jako celkový náboj na kondenzátorech v pravé části a má velikost $Q = CU = \frac{21}{10}C_1U$.

Napětí v levé části je $U' = \frac{Q}{C'} = \frac{7}{10}U = 16{,}8\ \mathrm{V}$, napětí v pravé části je $U'' = \frac{Q}{C''} = \frac{3}{10}U = 7{,}2\ \mathrm{V}$.

3 body

Dále platí, že náboj na kondenzátoru C_1 je $Q_1 = C_1U' = \frac{7}{10}C_1U = 168\ \mu\mathrm{C}$, na kondenzátoru C_2 je náboj $Q_2 = C_2U' = \frac{7}{5}C_1U = 336\ \mu\mathrm{C}$, na kondenzátoru C_3 je náboj $Q_3 = C_3U'' = \frac{9}{10}C_1U = 216\ \mu\mathrm{C}$ a na kondenzátoru C_4 je náboj $Q_4 = C_4U'' = \frac{6}{5}C_1U = 288\ \mu\mathrm{C}$.

2 body

3. a) Výsledná rychlost letadla vzhledem k zemi je vektorovým součtem jeho rychlosti $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke vzduchu a rychlosti větru $\boldsymbol{u}$.

Situace, které nastanou při prvním letu, znázorňuje obr. R4. V úseku AB bude velikost rychlosti letadla $v_1 = v+u$. V úseku BC bude nutno pootočit osu letounu vpravo a v úseku CA vlevo o stejný úhel φ, který určíme užitím sinové věty:

$$\sin\varphi = \frac{u}{v}\sin 120^\circ = \frac{u\sqrt{3}}{2v}\,.$$

Velikost v_2 výsledné rychlosti letadla na úseku BC určíme užitím kosinové věty. Platí:

$$v^2 = u^2 + v_2^2 - 2uv_2\cos 120^\circ = u^2 + v_2^2 + uv_2 \quad\Rightarrow\quad v_2^2 + uv_2 + u^2 - v^2 = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kořen $v_2 = \dfrac{-\,u + \sqrt{4v^2 - 3u^2}}{2}\,.$

Stejnou velikost $v_3 = v_2$ má rychlost letadla v úseku CA, neboť vektorový rovnoběžník je shodný jako v úseku BC.

Situace, které nastanou při druhém letu, znázorňuje obr. R5. V úseku AB bude velikost rychlosti letadla $v_1' = v - u$. Také zde jsou vektorové rovnoběžníky v úsecích BC a CA shodné. V úseku BC bude nutno pootočit osu letounu vlevo a v úseku CA vpravo o úhel φ', který je stejný jako při prvním letu, ale na opačnou stranu, neboť:

$$\sin\varphi' = \frac{u}{v}\sin 60^\circ = \frac{u\sqrt{3}}{2v}\,.$$

Velikost $v_2' = v_3'$ výsledné rychlosti letadla na úsecích BC a CA určíme opět užitím kosinové věty. Platí:

$$v^2 = u^2 + v_2'^2 - 2uv_2'\cos 60^\circ = u^2 + v_2'^2 - uv_2' \quad\Rightarrow\quad v_2'^2 - uv_2' + u^2 - v^2 = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kořen $v_2' = v_3' = \dfrac{u + \sqrt{4v^2 - 3u^2}}{2}\,.$

6 bodů

b) Celkové doby letu při prvním a druhém letu jsou v poměru

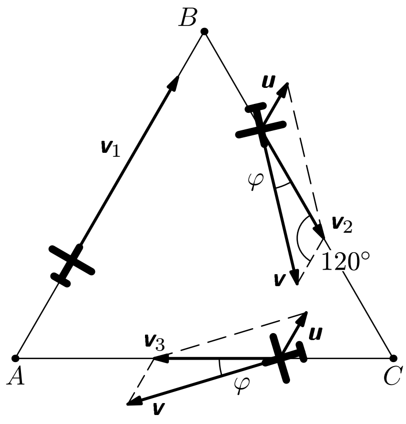
$$\frac{t}{t'} = \frac{\dfrac{l}{v_1} + 2\dfrac{l}{v_2}}{\dfrac{l}{v_1'} + 2\dfrac{l}{v_2'}} = \frac{\dfrac{1}{u+v} + \dfrac{4}{\sqrt{4v^2-3u^2} - u}}{\dfrac{1}{v-u} + \dfrac{4}{\sqrt{4v^2-3u^2} + u}}\,.$$

Označme $\sqrt{4v^2 - 3u^2} = K$. Pak

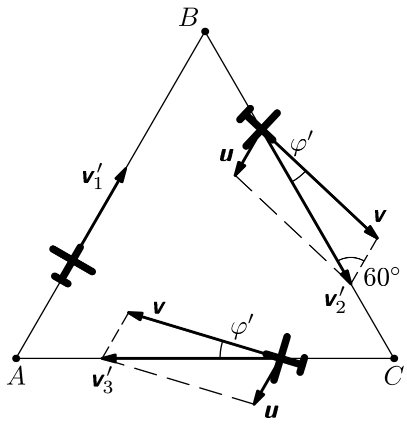
$$\frac{t}{t'} = \frac{\dfrac{K+3u+4v}{(u+v)(K-u)}}{\dfrac{K-3u+4v}{(v-u)(K+u)}} = \frac{(K+3u+4v)(K+u)(v-u)}{(K-3u+4v)(K-u)(v+u)} =$$

$$= \frac{4(v^2 + uK + vK + uv)(v-u)}{4(v^2 - uK + vK - uv)(v+u)} = \frac{(v+u)(K+v)(v-u)}{(v-u)(K+v)(v+u)} = 1\,.$$

Obě doby letu jsou stejné. **4 body**



Obr. R4



Obr. R5

4. a) Nejprve určíme objemy V_1 a V_2 z kompresního poměru a ze znalosti zdvihového objemu, tj. z rovnic $V_z = V_1 - V_2$, $\varepsilon = \dfrac{V_1}{V_2}$. Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$V_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} V_z = 363\ \text{cm}^3, \qquad V_2 = \frac{1}{\varepsilon - 1} V_z = 41\ \text{cm}^3.$$

Bod 1: $p_1 = 0{,}10$ MPa, $V_1 = 363\ \text{cm}^3$, $T_1 = 293$ K.
Bod 2: Mezi body 1 – 2 je adiabatická komprese. Platí

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = p_1 \varepsilon^{\varkappa} = 21 \cdot 10^5\ \text{Pa},$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1} = 699\ \text{K}, \qquad V_2 = 41\ \text{cm}^3.$$

Bod 3: Mezi body 2 – 3 je izochorické ohřátí. Platí

$$T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_2} = T_1 \varepsilon^{\varkappa - 1} \frac{p_3}{p_2} = 1\,748\ \text{K},$$

$$p_3 = p_2 \cdot 2{,}5 = 52{,}5 \cdot 10^5\ \text{Pa}, \qquad V_3 = V_2 = 41\ \text{cm}^3.$$

Bod 4: Mezi body 3 – 4 nastává adiabatická expanze. Platí

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\varkappa} = p_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa} = \frac{p_3}{\varepsilon^{\varkappa}} = 2{,}5 \cdot 10^5\ \text{Pa}, \quad V_4 = V_1 = 363\ \text{cm}^3,$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\varkappa - 1} = T_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} = \frac{T_3}{\varepsilon^{\varkappa - 1}} = 732{,}5\ \text{K}.$$

4 body

b) Hmotnost směsi připadající na jeden oběh určíme ze stavové rovnice

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M_m} R T_1,$$

z čehož $m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \cdot M_\mathrm{m} = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \cdot M_\mathrm{r} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} = 4{,}7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg}$. **1 bod**

c) Pracovní látka přijme teplo pouze při izochorickém ohřátí, tj. mezi body 2 – 3 a odevzdá teplo pouze při izochorickém ochlazení, tj. mezi body 4 – 1:

$$Q_1 = mc_\mathrm{v}(T_3 - T_2) = 325\ \mathrm{J}\,, \qquad Q_2 = mc_\mathrm{v}(T_4 - T_1) = 136\ \mathrm{J}.$$

Práce vykonaná v průběhu jednoho cyklu je $W = Q_1 - Q_2 = 189$ J.

Tepelná účinnost pak je $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 0{,}58 = 58\ \%$. **3 body**

d) Nejprve určíme čas potřebný k vykonání jednoho cyklu (tj. 2 otáčky) $\tau = 0{,}03$ s. Motor je čtyřválcový. Průměrný výkon motoru je

$$P = \frac{4W}{\tau} = 25\ \mathrm{kW}.$$

Hodinovou spotřebu paliva určíme z tepla přivedeného všem čtyřem válcům:

$$Q_\mathrm{h} = 4 \cdot \frac{3600}{0{,}03} \cdot 325\ \mathrm{J} = 156\ \mathrm{MJ}.$$

Při dané výhřevnosti paliva je spotřeba za hodinu $m_\mathrm{p} = \frac{Q_\mathrm{h}}{H} = 3{,}7$ kg.

2 body

5. a) Původní kruhová rychlost družice je dána vztahem

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z} + h}} = \sqrt{\frac{10\varkappa M_\mathrm{z}}{11 R_\mathrm{z}}}.$$

Označme $r_\mathrm{p} = 1{,}1 R_\mathrm{z}$, $r_\mathrm{a} = 11 R_\mathrm{z}$ vzdálenosti perigea a apogea eliptické trajektorie od zemského středu, v_p, v_a velikosti rychlosti družice v perigeu a apogeu. Podle druhého Keplerova zákona platí

$$r_\mathrm{p} v_\mathrm{p} = r_\mathrm{a} v_\mathrm{a}.$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{p}^2 - \frac{\varkappa m M_\mathrm{z}}{r_\mathrm{p}} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{a}^2 - \frac{\varkappa m M_\mathrm{z}}{r_\mathrm{a}}.$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých v_p, v_a. Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{z} \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}(r_\mathrm{a} + r_\mathrm{p})}}.$$

Po dosazení za r_a, r_p dostaneme $v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{200}{121} \frac{\varkappa M_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}}}$.

Při přechodu z kruhové trajektorie na eliptickou musíme zvětšit rychlost družice o

$$\Delta v = v_\mathrm{p} - v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}}} \left(\sqrt{\frac{200}{121}} - \sqrt{\frac{10}{11}} \right) = 2\,600\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

5 bodů

b) Doba oběhu družice na kruhové dráze je dána vztahem

$$T_1 = \frac{2\pi\frac{11}{10}R_\mathrm{z}}{\sqrt{\frac{10\varkappa M_\mathrm{z}}{11R_\mathrm{z}}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa M_\mathrm{z}}} \cdot \left(\frac{11}{10}R_\mathrm{z}\right)^{\frac{3}{2}} = 5870\ \mathrm{s} = 1{,}6\ \mathrm{hod.}$$

Užitím 3. Keplerova zákona určíme dobu oběhu družice T_2 na eliptické trajektorii:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{\left(\frac{r_\mathrm{a}+r_\mathrm{p}}{2}\right)^3}{r_\mathrm{p}^3} = \frac{\left(\frac{121}{20}R_\mathrm{z}\right)^3}{\left(\frac{11}{10}R_\mathrm{z}\right)^3},$$

z čehož

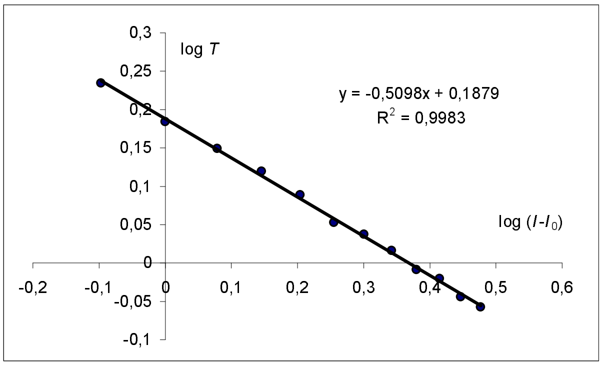
$$T_2 = \left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{3}{2}} T_1 = 12{,}9T_1.$$

Číselně $T_2 = 21$ hod.

5 bodů

6. Příklad naměřených hodnot a jejich zpracování programem Excel:

i	*I* [A]	10*T* [s]	*T* [s]	*I* - *I*$_o$ [A]	log(*I* - *I*$_o$)	log *T*
1	1,8	17,16	1,716	0,8	-0,09691	0,234517
2	2,0	15,28	1,528	1,0	0	0,184123
3	2,2	14,10	1,410	1,2	0,079181	0,149219
4	2,4	13,16	1,316	1,4	0,146128	0,119256
5	2,6	12,27	1,227	1,6	0,20412	0,088845
6	2,8	11,29	1,129	1,8	0,255273	0,052694
7	3,0	10,89	1,089	2,0	0,30103	0,037028
8	3,2	10,38	1,038	2,2	0,342423	0,016197
9	3,4	9,80	0,980	2,4	0,380211	-0,00877
10	3,6	9,54	0,954	2,6	0,414973	-0,02045
11	3,8	9,03	0,903	2,8	0,447158	-0,04431
12	4,0	8,76	0,876	3,0	0,477121	-0,0575



a) Průběh grafu velmi dobře odpovídá předpokládané lineární závislosti (3). Tím je ověřena i platnost vztahu (1).

b) Z rovnice trendu $y = -0{,}5098x + 0{,}1879$ určíme konstantu

$$m = -0{,}5098 \approx -\frac{1}{2}\,.$$

Vztah (1) můžeme tedy upřesnit na tvar

$$T = kB^{-\frac{1}{2}}\,.$$

(To je v dobrém souhlasu s úplným vzorcem pro periodu malých kmitů magnetky

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti magnetky a m její magnetický moment.)

c) Fyzikální rozměr konstanty k v soustavě SI určíme ze vztahu $k = TB^{\frac{1}{2}}$:

$$[k] = \mathrm{s}\cdot\mathrm{T}^{\frac{1}{2}} = s\cdot(\mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\,.$$

7. a) Plný válec o hmotnosti $2m$ a poloměru r by měl vzhledem k rotační ose souměrnosti jdoucí středem S moment setrvačnosti $\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot r^2$. Náš půlválec má tedy vzhledem k ose jdoucí středem S moment setrvačnosti $J_S = \frac{1}{2}mr^2$. Označme J_O moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí přímkou, ve které se půlválec dotýká vodorovné roviny a J_T moment setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm. Podle Steinerovy věty $J_S = J_T + mp^2$,

$$J_O = J_T + m(r-p)^2 = J_T + mr^2 - 2mrp + mp^2 = J_S + m(r^2 - 2rp) = \\ = mr^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right).$$

4 body

b) Vykloníme-li půlválec o malý úhel α_m (obr. R6), zvedne se jeho těžiště o výšku

$$h = p(1-\cos\alpha_\mathrm{m}) = p\left[1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha_\mathrm{m}}{2}\right)\right] = 2p\sin^2\frac{\alpha_\mathrm{m}}{2} \approx r\frac{2\alpha_\mathrm{m}^2}{3\pi}\,.$$

Když jej pustíme, začne harmonicky kolébat. Okamžitá odchylka α z rovnovážné polohy a okamžitá úhlová rychlost Ω se mění podle vztahů

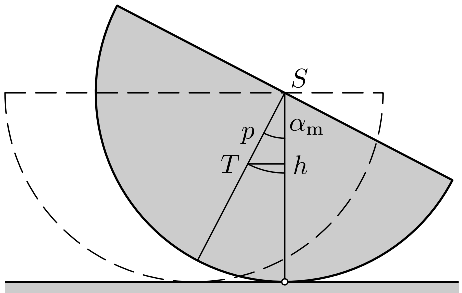
$$\alpha = \alpha_\mathrm{m}\cos\omega t\,,\quad \Omega = -\Omega_\mathrm{m}\sin\omega t\,,\quad \Omega_\mathrm{m} = \omega\alpha_\mathrm{m}$$

(analogických ke vztahům $y = y_\mathrm{m}\cos\omega t$, $v = -v_\mathrm{m}\sin\omega t$, $v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m}$ pro posuvný pohyb). Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}J_O\Omega_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)\omega^2\alpha_\mathrm{m}^2 = mgh = mgr\frac{2\alpha_\mathrm{m}^2}{3\pi}\,.$$

Z toho $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{g}{r}\,\dfrac{\dfrac{4}{3\pi}}{1{,}5 - \dfrac{8}{3\pi}} = \dfrac{4g}{r(4{,}5\pi - 8)}\,, \qquad T = \pi\sqrt{\dfrac{r(4{,}5\pi - 8)}{g}}.$

Na hmotnosti půlválce nezáleží, perioda kolébání závisí jen na jeho poloměru.
Pro dané hodnoty $T = 0{,}96$ s. **6 bodů**



Obr. R6