Řešení úloh celostátního kola 49. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: P. Šedivý (1), L. Richterek (2), I. Volf (3) a B. Vybíral (4)

1. a) Označme t_1, t_2, t_3 časy záblesků, v_1, v_2, v_3 příslušné rychlosti středu koule, a velikost zrychlení koule, t čas, kdy se koule zastaví a s zbývající dráhu středu koule. Platí

$$v_1 - v_2 = a(t_2 - t_1) = a\tau\,, \qquad v_2 - v_3 = a(t_3 - t_2) = a\tau\,, \tag{1}$$

$$s_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}(t_2 - t_1) = \frac{v_1 + v_2}{2}\tau\,, \qquad s_2 = \frac{v_2 + v_3}{2}(t_3 - t_2) = \frac{v_2 + v_3}{2}\tau\,. \tag{2}$$

Dosazením z (1) do (2) a úpravou dostaneme

$$2s_1 = 2v_2\tau + a\tau^2\,, \qquad 2s_2 = 2v_2\tau - a\tau^2\,.$$

Z toho

$$2(s_1 - s_2) = 2a\tau^2 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{s_1 - s_2}{\tau^2} = 0{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,, \tag{3}$$

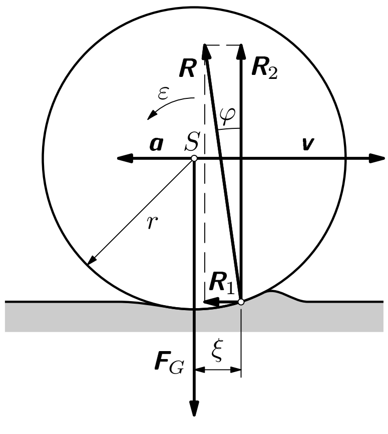
$$4v_2\tau = 2(s_1 + s_2) \quad\Rightarrow\quad v_2 = \frac{s_1 + s_2}{2\tau} = 0{,}80\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Dále platí

$$s_2 + s = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{(s_1 + s_2)^2}{8(s_1 - s_2)} \quad\Rightarrow\quad s = \frac{(s_1 + s_2)^2}{8(s_1 - s_2)} - s_2 = 0{,}18\ \mathrm{m}\,,$$

$$t - t_3 = t - t_2 - \tau = \frac{v_2}{a} - \tau = \tau\frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)} - \tau = 1{,}2\ \mathrm{s} < \tau$$

Při čtvrtém záblesku se koule nacházela v klidu ve vzdálenosti 18 cm od polohy při třetím záblesku. **5 bodů**



Obr. R1

b) Pohyb koule je složen z rovnoměrně zpomaleného posuvného pohybu se zrychlením o velikosti určené vztahem (3) a z rovnoměrně zpomaleného otáčivého pohybu, jehož úhlové zrychlení má velikost $\varepsilon = a/r$. Na kouli působí pouze tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce koberce $\boldsymbol{R}$, jejíž vodorovnou složku označíme $\boldsymbol{R}_1$ a svislou složku $\boldsymbol{R}_2$. Její působiště je v důsledku deformace koberce způsobené pohybem koule posunuto ve směru pohybu do vzdálenosti ξ od vektorové přímky tíhové síly (obr. R1). Podle první impulzové věty platí

$$R_1 = ma\,, \qquad R_2 - F_G = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = F_G = mg\,. \tag{4}$$

Výsledná reakce koberce má velikost

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = m\sqrt{a^2 + g^2} = 68{,}69\ \mathrm{N} \approx F_G$$

a je odchýlena od svislého směru proti směru pohybu koule o úhel

$$\varphi = \mathrm{arctg}(R_1/R_2) = \mathrm{arctg}(a/g) = 1{,}46^\circ.$$

Podle druhé impulzové věty platí

$$R_2\xi - R_1\sqrt{r^2 - \xi^2} = J\varepsilon = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r}\,. \tag{5}$$

Dosazením z (4) do (5) a úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici:

$$g\xi - \frac{2}{5}ar = a\sqrt{r^2 - \xi^2}\,, \qquad (g^2 + a^2)\xi^2 - \frac{4}{5}gra\xi - \frac{21}{25}a^2r^2 = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kořen

$$\xi = \frac{ra\left(2g + \sqrt{25g^2 + 21a^2}\right)}{5(g^2 + a^2)} = 0{,}00214\ \mathrm{m} = 2{,}1\ \mathrm{mm}\,.$$

5 bodů

Poznámka: Vodorovnou složku $\boldsymbol{R}_1$ reakce nazýváme *valivý odpor* a vzdálenost ξ je *rameno valivého odporu.* Při jeho výpočtu jsme mohli použít aproximaci $\sqrt{r^2 - \xi^2} \approx r$. Rovnice (5) se zjednoduší na tvar

$$R_2\xi - R_1 r \approx J\varepsilon \quad \Rightarrow \quad mg\xi \approx mar + \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r}\,,$$

Z toho $\xi \approx \dfrac{7a}{5g}r = 0{,}00214\ \mathrm{m} \doteq 2{,}1\ \mathrm{mm}\,.$

2. Jednotlivé čočky mají optické mohutnosti

$$\varphi_1 = (n-1)\frac{1}{r_1} = 11\ \mathrm{D}\,, \qquad \varphi_2 = (n-1)\frac{1}{r_2} = 22\ \mathrm{D}$$

a ohniskové vzdálenosti $\quad f_1 = \dfrac{r_1}{n-1} = \dfrac{1}{11}\ \mathrm{m}\,, \qquad f_2 = \dfrac{r_2}{n-1} = \dfrac{1}{22}\ \mathrm{m}\,.$

Výsledná optická mohutnost a ohnisková vzdálenost spojených čoček je

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 33\ \mathrm{D}\,, \qquad f = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{33}\ \mathrm{m}\,.$$

Paprsky, které procházejí ve větší vzdálenosti od optické osy (okrajem optické soustavy), se budou lámat pouze na větší ploskovypuklé čočce a vytvoří obraz ve vzdálenosti

$$a_1' = \frac{af_1}{a-f_1} = \frac{1}{6}\ \mathrm{m}\,.$$

Střední část optické soustavy vytvoří obraz ve vzdálenosti

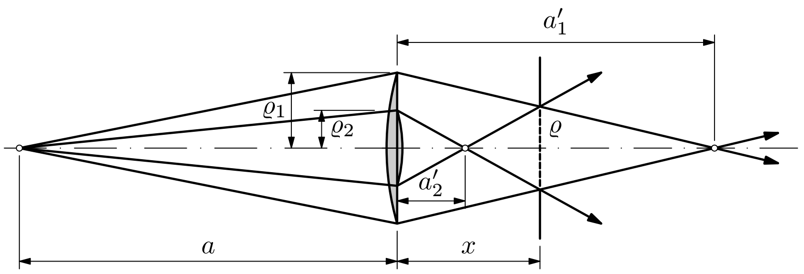
$$a_2' = \frac{af}{a-f} = \frac{1}{28}\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

Z obrázku R2 (ve kterém nejsou dodrženy proporce) je zřejmé, že krajní paprsky, které se lámou jen na větší čočce a krajní paprsky, které se lámou na obou čočkách vytvoří rotační kuželové plochy. Nejmenší osvětlená plocha je ohraničena kružnicí, která je průnikem těchto kuželových ploch. Její vzdálenost x od spojených čoček a poloměr ϱ určíme z podobnosti trojúhelníků. Platí

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{a_1' - x}{a_1'}\,, \qquad \frac{\varrho}{\varrho_2} = \frac{x - a_2'}{a_2'}\,.$$

4 body



Obr. R2

Z toho

$$\varrho = \frac{(a_1' - x)\varrho_1}{a_1'} = \frac{(x - a_2')\varrho_2}{a_2'} \quad \Rightarrow \quad (a_1' - x)\varrho_1 a_2' = (x - a_2')\varrho_2 a_1'\,,$$

$$x = \frac{a_1' a_2' (\varrho_1 + \varrho_2)}{\varrho_1 a_2' + \varrho_2 a_1'} = 0{,}075 \text{ m}\,,$$

$$x = a_1' - \frac{\varrho a_1'}{\varrho_1} = \frac{\varrho a_2'}{\varrho_2} + a_2' \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{a_1' - a_2'}{\dfrac{a_1'}{\varrho_1} + \dfrac{a_2'}{\varrho_2}} = 0{,}0077 \text{ m}\,.$$

3 body

3. a) Celkový zářivý výkon Slunce je dán vztahem $L = 4\pi a^2 P_1$, kde a je vzdálenost rovinné plochy od Slunce, P_1 je výkon slunečního záření dopadajícího kolmo na plochu 1 m^2 ve vzdálenosti a. Po dosazení $P_1 = 1,365$ kW, $a = 1$ AU dostaneme $L = 3{,}84 \cdot 10^{26}$ W.

1 bod

b) Platí

$$L = 4\pi R_\mathrm{s}^2 \sigma T_\mathrm{s}^4 = \pi D^2 \sigma T_\mathrm{s}^4 = 4\pi a^2 P_1\,,$$

kde R_s je poloměr Slunce, D jeho průměr a T_s teplota fotosféry. Z toho

$$T_\mathrm{s} = \sqrt[4]{\frac{4P_1}{\sigma\left(\frac{D}{a}\right)^2}}\,,$$

přičemž $\dfrac{D}{a} = 32' = 0{,}0093084$ rad. Číselně vychází $T_\mathrm{s} = 5\,770$ K.

1 bod

c) Zářivý výkon dopadající na Zemi za 1 sekundu je dán vztahem

$$P = P_1 \cdot S = P_1 \cdot \pi R_\mathrm{z}^2.$$

Potom $W_\mathrm{den} = P \cdot t_1 = P_1 \cdot \pi R_\mathrm{z}^2 \cdot t_1$, kde $t_1 = 86\,400$ s.
Pro dané hodnoty je $W_\mathrm{den} = 1{,}5 \cdot 10^{22}$ J, $W_\mathrm{roc} = 365{,}25 \cdot W_\mathrm{den} = 5{,}5 \cdot 10^{24}$ J.

1 bod

d) Maximální výkon solárních článků je
$P_\mathrm{max} = 1\,365 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}12 \cdot 1 \cdot 10^6\ \mathrm{W} = 65{,}5$ MW.

1 bod

e) Celkový výkon slunečního záření dopadajícího na družici Země je roven celkovému výkonu záření, které družice vyzařuje. Teplota T_z družice se určí ze vztahu

$$\pi R^2 P_1 = \sigma T_\mathrm{z}^4 \cdot 4\pi R^2,$$

z čehož

$$T_\mathrm{z} = \sqrt[4]{\frac{P_1}{4\sigma}} = 278{,}5\ \mathrm{K},\ \text{tj. } t_\mathrm{z} \approx 5\ ^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

f) Pro Mars můžeme psát $\dfrac{P_{1\mathrm{m}}}{P_1} = \dfrac{a^2}{a_\mathrm{m}^2}$. Analogicky jako v případě Země platí

$$T_\mathrm{m} = \sqrt[4]{\frac{P_{1\mathrm{m}}}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\left(\frac{a}{a_\mathrm{m}}\right)^2 \frac{P_1}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{a}{a_\mathrm{m}}}T_\mathrm{z}.$$

Pro dané hodnoty je $T_\mathrm{m} = \sqrt{\dfrac{1}{1{,}52}} \cdot 279\ \mathrm{K} = 226\ \mathrm{K}$, tj. $t_\mathrm{m} = -47\ ^\circ\mathrm{C}$.

2 body

g) Pro Zemi v periheliu platí $r_\mathrm{p} = a(1-\varepsilon_\mathrm{z})$, $P_{1\mathrm{p}} = \dfrac{P_1}{(1-\varepsilon_\mathrm{z})^2}$. Analogicky jako v úloze e) můžeme psát $T_{1\mathrm{p}} = \sqrt[4]{\dfrac{P_{1\mathrm{p}}}{4\sigma}} = \sqrt{\dfrac{1}{1-\varepsilon_\mathrm{z}}}T_\mathrm{z} = 281$ K.

Obdobně v aféliu platí $r_\mathrm{a} = a(1+\varepsilon_\mathrm{z})$, $P_\mathrm{1a} = \dfrac{P_1}{(1+\varepsilon_\mathrm{z})^2}$. Analogicky jako v úloze e) můžeme psát $T_\mathrm{1a} = \sqrt[4]{\dfrac{P_\mathrm{1a}}{4\sigma}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\varepsilon_\mathrm{z}}}T_\mathrm{z} = 276\ \mathrm{K}$.

Teplota povrchu družice Země se mění s ohledem na vzdálenost od Slunce v rozmezí od $3\ ^\circ\mathrm{C}$ do $8\ ^\circ\mathrm{C}$.

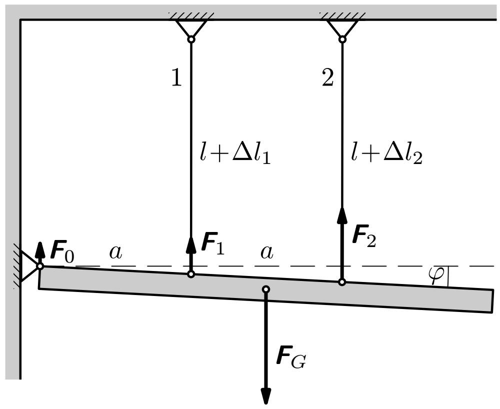
Pro Mars v periheliu platí $r_\mathrm{pm} = a_\mathrm{m}(1-\varepsilon_\mathrm{m})$, $P_\mathrm{1pm} = \dfrac{P_\mathrm{1m}}{(1-\varepsilon_\mathrm{m})^2}$. Analogicky jako v případě Země můžeme psát $T_\mathrm{1pm} = \sqrt[4]{\dfrac{P_\mathrm{1pm}}{4\sigma}} = \sqrt{\dfrac{1}{1-\varepsilon_\mathrm{m}}}T_\mathrm{m} = 237\ \mathrm{K}$.

Obdobně v aféliu platí $r_\mathrm{am} = a_\mathrm{m}(1+\varepsilon_\mathrm{m})$, $P_\mathrm{1am} = \dfrac{P_\mathrm{1m}}{(1+\varepsilon_\mathrm{m})^2}$. Analogicky jako v případě Země můžeme psát $T_\mathrm{1am} = \sqrt[4]{\dfrac{P_\mathrm{1am}}{4\sigma}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\varepsilon_\mathrm{m}}}T_\mathrm{m} = 216\ \mathrm{K}$.

Teplota družice Marsu se tedy mění v rozmezí od $-57\ ^\circ\mathrm{C}$ do $-36\ ^\circ\mathrm{C}$.

2 body

4. a) Situace po odstranění podpěr je na obr. R3. Tíhová síla a síly, kterými na nosník působí stěna a pruty, musí splňovat podmínky rovnováhy. Protože odchylky prutů od svislého směru jsou nepatrné, můžeme vektorové přímky všech těchto sil považovat za svislé.



Obr. R3

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 2F_1 \,.$$

Podle momentové věty k bodu upevnění na stěně je

$$F_G \cdot 1{,}5a = F_1 a + F_2 \cdot 2a = 5F_1 a \,.$$

Z toho dostaneme

$$F_1 = \frac{3}{10} F_G = 600 \text{ N}\,, \quad F_2 = 1\,200 \text{ N}\,, \quad F_0 = F_G - F_1 - F_2 = 200 \text{ N}$$

a napětí v prutech $\sigma_1 = \dfrac{F_1}{S} = 2{,}4 \cdot 10^7$ Pa, $\sigma_2 = 2\sigma_1 = 4{,}8 \cdot 10^7$ Pa.
Pruty se prodloužily o

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{ES} = \frac{0{,}3 F_G l}{ES} = 6{,}86 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad \Delta l_2 = 1{,}37 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

a nosník se odchýlil od vodorovného směru o úhel

$$\varphi = \frac{\Delta l_1}{a} = 1{,}71 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0{,}0098^\circ = 0{,}59' \,.$$

4 body

b) Po zahřátí se prodloužení prutů změní na $\Delta l_2' = 2\Delta l_1'$. Z toho část o velikosti $\alpha l \Delta t$ připadá na teplotní prodloužení. Elastické síly, kterými pruty působí na nosník, se změní na

$$F_1' = \frac{ES(\Delta l_1' - \alpha l \Delta t)}{l}\,, \quad F_2' = \frac{ES(2\Delta l_1' - \alpha l \Delta t)}{l}\,. \tag{1}$$

Z momentové věty plyne

$$F_G \cdot \frac{3a}{2} = \frac{ES(\Delta l_1' - \alpha l \Delta t)}{l} \cdot a + \frac{ES(2\Delta l_1' - \alpha l \Delta t)}{l} \cdot 2a = \\ = \frac{ESa(5\Delta l_1' - 3\alpha l \Delta t)}{l}\,.$$

Z toho $\Delta l_1' = \dfrac{3F_G l}{10ES} + \dfrac{3}{5}\alpha l \Delta t = 2{,}036 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta l_2' = 4{,}07 \cdot 10^{-4}$ m.
Dosazením do (1) dostaneme

$$F_1' = \frac{3}{10}F_G - \frac{2}{5}ES\alpha\Delta t = -188\ \text{N}\,, \quad F_2' = \frac{6}{10}F_G + \frac{1}{5}ES\alpha\Delta t = 1\,594\ \text{N}\,, \tag{2}$$

$$F_0' = F_G - F_1' - F_2' = 594\ \text{N}$$

a napětí v prutech $\sigma_1' = \dfrac{F_1'}{S} = -7{,}5 \cdot 10^6$ Pa, $\sigma_2' = \dfrac{F_2'}{S} = 64 \cdot 10^6$ Pa.
Napětí v prutu 1 se změnilo z tahového na tlakové. Vychýlení nosníku se zvětšilo na $\varphi' = \dfrac{\Delta l_1'}{a} = 5{,}09 \cdot 10^{-4}$ rad $= 0{,}029° = 1{,}7'$.

5 bodů

Poznámka: Kritická síla, při které tyč dané délky a kruhového průřezu upevněná na koncích otáčivě ztratí stabilitu ve vzpěru, je

$$F_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2} = \frac{\pi^2 E \frac{\pi d^4}{64}}{l^2} = \frac{\pi E S^2}{4l^2} = 286\ \text{N}\,.$$

c) Teplotu t_3, při které bylo napětí v prutu 1 nulové, určíme úpravou vztahu (2). Dostaneme

$$\frac{3}{10}F_G = \frac{2}{5}ES\alpha(t_3 - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_3 = t_1 + \frac{3F_G}{4ES\alpha} = 29\ °\text{C}\,.$$

1 bod