Řešení úloh krajského kola 49. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: B. Vybíral (4), J. Jírů (3) a P. Šedivý (1, 2)

1. Ve válci probíhá izobarický děj při tlaku $p = p_{\mathrm{at}} + mg/S$. Označme ΔT změnu teploty za dobu $\Delta\tau$.

a) Ze stavové rovnice plyne

$$nR\Delta T = p\Delta V = \left(p_{\mathrm{at}} + \frac{mg}{S}\right) Sv\Delta\tau = (p_{\mathrm{at}}S + mg)v\Delta\tau\,.$$

Z toho

$$\frac{\Delta T}{\Delta\tau} = \frac{(p_{\mathrm{at}}S + mg)v}{nR} = 0{,}49\ \mathrm{K}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

4 body

b) Teplo Q dodané topnou spirálou za dobu $\Delta\tau$ je rovno součtu práce vykonané plynem a přírůstku vnitřní energie plynu, válce a pístu:

$$Q = P\Delta\tau = W' + \Delta U_{plynu} + \Delta U_{\text{válce}\,+\,\text{pístu}}\,. \tag{1}$$

Pro helium jako plyn s jednoatomovými molekulami platí

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}p\Delta V\,.$$

Rovnici (1) upravíme na tvar

$$P\Delta\tau = p\Delta V + \frac{3}{2}p\Delta V + C\Delta T = \frac{5}{2}(p_{\mathrm{at}}S + mg)v\Delta\tau + \frac{C(p_{\mathrm{at}}S + mg)v\Delta\tau}{nR}\,.$$

Z toho

$$P = (p_{\mathrm{at}}S + mg)v\left[\frac{C}{nR} + \frac{5}{2}\right] = 104\ \mathrm{W}\,.$$

6 bodů

2. Délku hlavní poloosy trajektorie komety Tuttle určíme porovnáním jejího pohybu s pohybem Země ($T_1 = 1$ r, $a_1 = 1$ AU). Podle třetího Keplerova zákona platí

$$a = a_1 \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_1^2}} = 5{,}70 \text{ AU} = 8{,}53 \cdot 10^{11} \text{ m}\,.$$

Excentricita trajektorie je $e = a - r_\text{p} = 4{,}68$ AU a délka vedlejší poloosy

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = 3{,}25 \text{ AU} = 4{,}87 \cdot 10^{11} \text{ m}\,.$$

Vzdálenost komety od Slunce v aféliu je $2a - r_\text{p} = 10{,}4 \text{ AU} = 1{,}55 \cdot 10^{12}$ m.

5 bodů

Plošná rychlost komety je

$$w = \frac{\pi ab}{T} = \frac{v_\text{p} r_\text{p}}{2}\,.$$

Z toho

$$v_\text{p} = \frac{2\pi ab}{T r_\text{p}} = 3{,}97 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\,.$$

5 bodů

Poznámka: Ke stejnému výsledku dojdeme i použitím vztahu

$$v = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\,,$$

kde $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce a $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta. Vztah můžeme odvodit z druhého Keplerova zákona a ze zákona zachování energie.

3. a) Pro periodu fyzického kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\,, \tag{1}$$

kde

$$J = ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}ml^2 \tag{2}$$

je moment setrvačnosti kyvadla a

$$D = mgl + mg\frac{l}{2} = \frac{3}{2}mgl$$

je direkční moment. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}}\,.$$

2 body

Úhlová výchylka se u harmonických kmitů mění podle rovnice

$$\varphi = \varphi_\mathrm{m}\sin\omega t\,;$$

její časovou derivací dostaneme závislost úhlové rychlosti $\mathit{\Omega}$ kyvadla na čase

$$\mathit{\Omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \varphi_\mathrm{m}\omega\cos\omega t\,. \tag{3}$$

(Tyto rovnice lze též napsat na základě analogie mezi posuvným a rotačním pohybem $y = y_\mathrm{m}\sin\omega t$, $v = v_\mathrm{m}\cos\omega t$, kde délkové výchylce odpovídá úhlová výchylka a rychlosti odpovídá úhlová rychlost.) Úhlová rychlost je maximální při průchodu kyvadla rovnovážnou polohou, kdy $\cos\omega t = 1$, tedy

$$\mathit{\Omega}_\mathrm{m} = \varphi_\mathrm{m}\omega = \varphi_\mathrm{m}\frac{2\pi}{T}\,.$$

Po dosazení vztahu (1) a po úpravě dostaneme

$$\mathit{\Omega}_\mathrm{m} = \varphi_\mathrm{m}\sqrt{\frac{6g}{5l}}\,. \tag{4}$$

2 body

Jiná varianta určení $\mathit{\Omega}_\mathrm{m}$: Označme h výšku kuličky na dolním konci tyče nad její rovnovážnou polohou při úhlové výchylce φ_m. Pak platí

$$h = l(1 - \cos\varphi_\mathrm{m})\,. \tag{5}$$

Podle zákona zachování mechanické energie dále platí:

$$mgh + mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}J\mathit{\Omega}_\mathrm{m}^2\,.$$

Užitím rovnic (2) a (5) dostaneme $\Omega_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{12g}{5l}(1-\cos\varphi_{\mathrm{m}})}$

a pomocí aproximace $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi_{\mathrm{m}}^2}{2}$ pro malé úhly dospějeme ke stejnému výsledku (4).

b) Perioda kyvadla je funkcí vzdálenosti x:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2+mx^2}{mgl+mgx}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{l^2+x^2}{l+x}}\,.$$

Vzhledem k monotónnosti druhé odmocniny stačí nalézt extrém funkce pod odmocninou. Její derivace je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{l^2+x^2}{l+x} = \frac{2x(l+x)-(l^2+x^2)}{(l+x)^2} = \frac{x^2+2lx-l^2}{(l+x)^2}\,.$$

Derivace je nulová pro $x = (\sqrt{2}-1)l = 0{,}414l$.

3 body

Druhá derivace je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2+2lx-l^2}{(l+x)^2} = \frac{(2x+2l)(l+x)^2-(x^2+2lx-l^2)\cdot 2(l+x)}{(l+x)^4} =$$

$$\frac{4l^2}{(l+x)^3} > 0\,,$$

tedy pro nalezené x je perioda minimální s hodnotou

$$T_{\mathrm{min}} = 2\pi\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{0{,}828\frac{l}{g}}\,.$$

(Místo druhé derivace lze o minimu rozhodnout dodatečně porovnáním této periody s periodou v krajních polohách.) **2 body**

V obou krajních polohách se perioda kmitů limitně blíží periodě matematického kyvadla

$$T_{\mathrm{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T_{\mathrm{max}}\,.$$ **1 bod**

4. a) Tahové napětí v laně vyvolané jeho vlastní tíhou se rovnoměrně zvětšuje v závislosti na vzdálenosti příčného řezu od dolního konce, kde je nulové, až do hodnoty $\mu l_0 g/S$ u horního konce. Prodloužení celého lana je dáno průměrnou hodnotou napětí:

$$\Delta l = \frac{\overline{\sigma}}{E} l_0 = \frac{\mu l_0 g}{2SE} l_0 = \frac{\mu l_0^2 g}{2ES} = 0{,}462 \text{ m} .$$

2 body

b) Působením klece se lana prodlouží na stejnou délku. Pro prodloužení lan vyvolaná tíhou klece platí

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta l_0 .$$

Pro síly, kterými klec působí na lana, platí

$$F_1 = F_3 = \frac{ES\Delta l_1}{l_0} , \qquad F_2 = \frac{ES(\Delta l_1 + \Delta l_0)}{l_0} = F_1 + \frac{ES\Delta l_0}{l_0} ,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 3F_1 + \frac{ES\Delta l_0}{l_0} = mg ,$$

$$F_1 = \frac{mg}{3} - \frac{ES\Delta l_0}{3l_0} = 2{,}38 \cdot 10^4 \text{ N} , \quad F_2 = \frac{mg}{3} + \frac{2ES\Delta l_0}{3l_0} = 3{,}57 \cdot 10^4 \text{ N} .$$

Lana se působením tíhy klece prodlouží o

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{mgl_0}{3ES} - \frac{\Delta l_0}{3} = 0{,}503 \text{ m} , \qquad \Delta l_2 = \frac{mgl_0}{3ES} + \frac{2\Delta l_0}{3} = 0{,}753 \text{ m} .$$

4 body

c) Největší napětí jsou u horních konců lan:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{F_1 + \mu l_0 g}{S} = 135 \text{ MPa} , \qquad \sigma_2 = \frac{F_2 + \mu l_0 g}{S} = 159 \text{ MPa} .$$

2 body

d) Tuhost lan $k_1 = k_2 = k_3 = \dfrac{ES}{l_0}$; celková tuhost $k = 3k_1 = \dfrac{3ES}{l_0}$.

Ekvivalentní hmotnost soustavy je $m + 3\dfrac{\mu l_0}{3} = m + \mu l_0$.

Frekvence vlastních kmitů

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3ES}{(m + \mu l_0) l_0}} = 0{,}527 \text{ Hz} .$$

2 body