Řešení úloh regionálního kola 48. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3) a L' Mucha (4)

1. a) Z grafu vyčteme počáteční úhlovou rychlost $\omega_0 = 80\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Velikost počáteční rychlosti pohybu automobilu je $v_0 = r\omega_0 = 21{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1 bod

b) Obdobně vypočteme velikosti okamžité rychlosti v časech $t_1 = 3$ s, $t_2 = 5$ s a $t_3 = 10$ s:

$v_1 = r\omega_1 = 16{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\quad v_2 = r\omega_1 = 5{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\quad v_3 = 0$.

Velikost zrychlení na jednotlivých úsecích jsou $\quad a_1 = \dfrac{v_0 - v_1}{t_1 - t_0} = 1{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,

$a_2 = \dfrac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1} = 5{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\quad a_3 = \dfrac{v_2 - v_3}{t_3 - t_2} = 1{,}08\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

3 body

c) Z rovnice $2\pi r = \dfrac{1}{2}a_3T^2$ plyne $T = 2\sqrt{\dfrac{\pi r}{a_3}} = 1{,}8$ s.

1 bod

d) Brzdnou dráhu určíme s využitím vypočtených rychlostí a zrychlení:

$$s = v_0t_1 - \frac{1}{2}a_1t_1^2 + v_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + \frac{1}{2}a_3(t_3 - t_2)^2 =$$

$$= (56{,}7 + 21{,}6 + 13{,}5)\ \mathrm{m} = 92\ \mathrm{m},$$

případně $s = \dfrac{(v_0 + v_1)(t_1 - t_0)}{2} + \dfrac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2} + \dfrac{v_2(t_3 - t_2)}{2} = 92$ m.

Jiná možnost je vypočítat obsah plochy pod grafem, kdy na druhém úseku doplníme spojnici bodů [3 s, 60 rad/s] a [5 s, 20 rad/s]. Výsledek $\varphi = 340$ rad udává celkový úhel otočení každého kola, pokud by během brzdění nedošlo ke smyku. Brzdná dráha je $s = \varphi r = 92$ m.

2 body

e) Automobil se bude pohybovat z počáteční rychlosti v_0 po dobu t do zastavení smykem rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti a_2. Z rovnic $v = a_2t$, $s = \dfrac{1}{2}a_2t^2$ plyne

$$t = \frac{v_0}{a_2} = 4{,}0\ \mathrm{s}, \qquad s = \frac{v_0^2}{2a_2} = 43\ \mathrm{m}.$$

2 body

f) Při jízdě smykem je $fmg = ma_2$. Z toho $f = \dfrac{a_2}{g} = 0{,}55$.

1 bod

2. a) Velikost urychlující síly $F = ma$ nesmí překročit maximální velikost třecí síly $F_\mathrm{t} = fm_0g$ mezi koly a kolejnicemi, jinak by docházelo k prokluzování kol. Maximální velikost urychlující síly tak splňuje podmínku $F_\mathrm{max} = F_\mathrm{t}$. Z těchto předpokladů plyne:

$$a_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{max}}{m_0} = \frac{fm_0g}{m_0} = fg = 1{,}47\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Ke splnění podmínek úlohy musí lokomotiva udržovat toto zrychlení během celého pohybu, musí se tedy pohybovat rovnoměrně zrychleně. Vyloučením času z rovnic

$$v = at\,, \qquad s = \frac{1}{2}at^2$$

dostaneme dráhu $s = \dfrac{v^2}{2a}$.

K dosažení dané velikosti rychlosti v_1 je dráha minimální při maximální velikosti zrychlení:

$$s_\mathrm{min} = \frac{v_1^2}{2a_\mathrm{max}} = \frac{v_1^2}{2fg} = 210\ \mathrm{m}.$$

3 body

b) Při rovnoměrně zrychleném pohybu je maximální velikost pohybové síly $F_\mathrm{max} = m_0a_\mathrm{max}$ a zůstává během celého rozjíždění konstantní. Okamžitý výkon je při konstantní síle maximální při maximální velikosti okamžité rychlosti, tj. v závěru rozjíždění při dosažení velikosti okamžité rychlosti v_1. Proto platí:

$$P_\mathrm{max} = F_\mathrm{max}v_1 = m_0a_\mathrm{max}v_1 = fm_0gv_1 = 2{,}76\ \mathrm{MW}\,.$$

2 body

c) Kola vagonů nejsou záběrová, k rozjíždění se uplatňuje pouze tření mezi koly lokomotivy a kolejnicemi. Velikost třecí síly se tak zachová, velikost maximální pohybové síly splňuje stejnou podmínku, avšak hmotnost urychlovaných těles se zvětší. Z úvah plyne:

$$a'_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{max}}{m_0 + 6m_1} = \frac{fm_0g}{m_0 + 6m_1} = \frac{m_0}{m_0 + 6m_1}fg = 0{,}35\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Minimální dráha tentokrát je

$$s'_\mathrm{min} = \frac{v_1^2}{2a'_\mathrm{max}} = \frac{m_0 + 6m_1}{m_0}\,\frac{v_1^2}{2fg} = 890\ \mathrm{m}.$$

Opět platí

$$P_\mathrm{max} = F_\mathrm{max}v_1 = (m_0 + 6m_1)a'_\mathrm{max}v_1 = (m_0 + 6m_1)\frac{m_0}{m_0 + 6m_1}fgv_1 = \\ = fm_0gv_1 = 2{,}76\ \mathrm{MW}\,.$$

5 bodů

3. a) Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

a z rovnice $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$ plyne

$l = \dfrac{v_1^2}{2g\sin\alpha} = 406\ \text{m}.$ **3 body**

b) Z rovnice (1) a ze zákona zachování mechanické energie v případě nenulové počáteční rychlosti

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

plyne $v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_0^2} = 65\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}.$ **3 body**

c) Z kinematických rovnic $v_1 = at_1,\ v_2 = v_0 + at_2$ a ze vztahu pro zrychlení na nakloněné rovině $a = g\sin\alpha$ plyne

$t_1 = \dfrac{v_1}{g\sin\alpha} = 49\ \text{s},\qquad t_2 = \dfrac{\sqrt{v_1^2+v_0^2} - v_0}{g\sin\alpha} = 32\ \text{s}.$ **4 body**

4. a) Zeměpisná šířka severního pólu je $90°$, družice opíše úhel $\Delta\varphi = 90° - 50° = 40°$, což je 1/9 z plného úhlu $360°$. Doba přeletu též tvoří 1/9 z periody oběhu, tedy

$\Delta t = \dfrac{T}{9} = 9\,570\ \text{s} \approx 2\ \text{h}\ 40\ \text{min}.$ **2 body**

b) Z rovnosti mezi velikostmi dostředivé a gravitační síly $mr\dfrac{4\pi^2}{T^2} = \varkappa\dfrac{Mm}{r^2}$

plyne $r = \sqrt[3]{\dfrac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}} = 42\,170\ \text{km}.$

Výška družice nad zemským povrchem je $h = r - R = 35\,800\ \text{km}.$

Hledaný poměr je $h/R = 5{,}6.$ **4 body**

c) Velikost obvodové rychlosti družice je $v = \dfrac{2\pi r}{T} = 3\,080\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$

Ve vztažné soustavě spojené s rotující Zemí se rovina trajektorie družice, která má stálou polohu vzhledem ke vzdáleným hvězdám, otáčí okolo zemské osy s periodou T. Bod trajektorie, který se nachází nad rovnoběžkou se zeměpisnou šířkou φ, se pohybuje od východu k západu (stejně jako Slunce, Měsíc a hvězdy) po kružnici o poloměru $r_1 = r\cos\varphi$, velikost obvodové rychlosti je

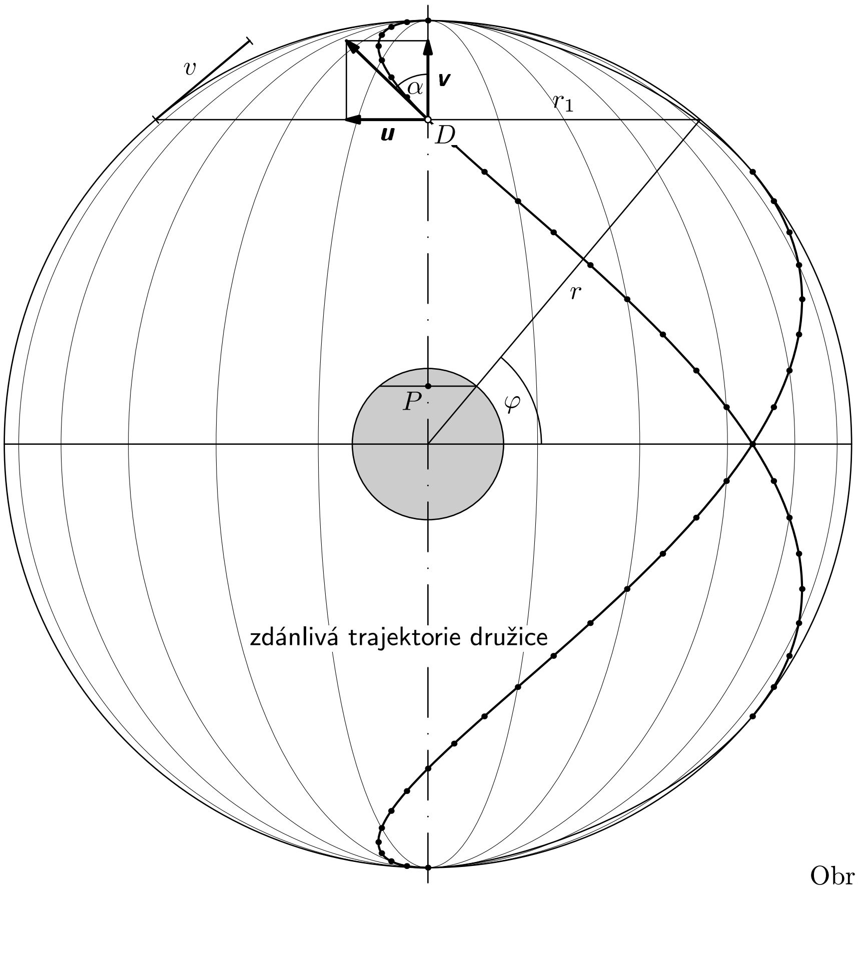
$$u = \frac{2\pi r_1}{T} = \frac{2\pi r\cos\varphi}{T} = 1\,980\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Složením pohybu družice ve směru na sever a zdánlivého pohybu ve směru na západ dostaneme v zenitu pozorovatele pohyb, jehož směr je odchýlený od severního směru na západ o úhel α splňující rovnici

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{v} = \frac{r_1}{r} = \cos \varphi .$$

Dosazením dostaneme $\alpha = 32{,}7°$. Na obr. R1 je zobrazena zdánlivá trajektorie družice. Protože vektor $\boldsymbol{v}$ není rovnoběžný s nákresnou, jeví se zkrácený, a úhel α je na obrázku naopak poněkud zvětšený.

4 body



Obr. R1