Řešení úloh regionálního kola 48. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autor úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3), R. Horáková (4)

1. a) Velikost rychlosti se ustálí v okamžiku, kdy velikost odporové síly vzduchu se vyrovná velikosti tíhové síly kroupy. Tuto podmínku zapíšeme rovnicí

$$mg = \frac{1}{2} C S \varrho v^2 \,,$$

kde

$$m = \varrho_1 \frac{4}{3} \pi R^3 \qquad (1)$$

je hmotnost kroupy a $S = \pi R^2$ obsah příčného řezu. Po dosazení a úpravě z rovnice plyne

$$v = \sqrt{\frac{8 \varrho_1 g R}{3 C \varrho}} \,. \qquad (2)$$

Číselně vychází $v = 13\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Z výsledného vzorce plyne, že s rostoucím poloměrem kroupy roste velikost rychlosti dopadu, tudíž velké kroupy padají rychleji než kroupy malé.

5 bodů

b) Dosazením vztahů (1) a (2) do rovnice pro kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2$ a po úpravě dostaneme

$$E_\mathrm{k} = \frac{16 \pi \varrho_1^2 g}{9 C \varrho} \cdot R^4 \,, \qquad (3)$$

neboli kinetická energie je přímo úměrná čtvrté mocnině poloměru.

3 body

c) Z rovnice (2) plyne $v_1 : v_2 = \sqrt{R_1} : \sqrt{R_2}$, tedy hledaný poměr je

$$v_1 : v_2 = 1 : 2 \,.$$

Z rovnice (3) plyne $E_{\mathrm{k}1} : E_{\mathrm{k}2} = R_1^4 : R_2^4$, tedy hledaný poměr je

$$E_{\mathrm{k}1} : E_{\mathrm{k}2} = 1 : 256 \,.$$

2 body

(*Výsledek dokumentuje, proč velké kroupy způsobují škody na vegetaci, na karosériích automobilů, na sklenících apod.)*

2. a) Tlakové síly působící na písty jsou v rovnováze s jejich tíhou. Z toho určíme tlak p vzduchu v uzavřeném prostoru:

$$(p - p_\mathrm{a})S_1 = (m_1 + m_2)g + (p - p_\mathrm{a})S_2\,,$$
$$p = p_\mathrm{a} + \frac{(m_1 + m_2)g}{S_1 - S_2}\,.$$

Při teplotě t má vzduch v uzavřeném prostoru objem

$$V = (S_1 + S_2)\frac{l}{2}\,.$$

Látkové množství vzduchu a jeho hmotnost určíme užitím stavové rovnice:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{\left[p_\mathrm{a} + \dfrac{(m_1 + m_2)g}{S_1 - S_2}\right] \cdot (S_1 + S_2)\dfrac{l}{2}}{RT}\,, \qquad m = nM_\mathrm{m}\,.$$

Číselně vychází $p = 1{,}0654 \cdot 10^5$ Pa, $V = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ m^3, $n = 0{,}267$ mol, $m = 7{,}73$ g.

5 bodů

b) Změna teploty vzduchu ve vymezeném prostoru proběhne jako izobarický děj. Nový objem plynu je

$$V_1 = V\frac{T_1}{T} = V\frac{T + \Delta T}{T} = V\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) = S_1\left(\frac{l}{2} + x\right) + S_2\left(\frac{l}{2} - x\right)\,.$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$(S_1 + S_2)\frac{l}{2}\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) = (S_1 + S_2)\frac{l}{2} + (S_1 - S_2)x\,,$$
$$(S_1 - S_2)x = (S_1 + S_2)\frac{l}{2} \cdot \frac{\Delta T}{T}\,, \qquad x = \frac{(S_1 + S_2)l\Delta T}{2(S_1 - S_2)T}\,.$$

Musí ovšem platit $|x| \leq \dfrac{l}{2}$. To je splněno pro $|\Delta T| \leq \dfrac{(S_1 - S_2)T}{S_1 + S_2}$.

Pro dané hodnoty je podmínka $|\Delta T| \leq 180$ K splněna. Píst se zvedne o $x = 6{,}9$ cm.

5 bodů

3. a) Vzhledem k předpokladům úlohy můžeme použít zákon zachování energie. Kinetická energie valící se kuličky je součtem energie pohybu posuvného a pohybu rotačního

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2\,.$$

Kinetická energie kuličky na konci první nakloněné roviny je rovna potenciální energii na počátku pohybu:

$$\frac{7}{10}mv_1^2 = mgH \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gH}\,.$$

Kinetická energie kuličky před nárazem na zarážku je rovna rozdílu počáteční a konečné potenciální energie:

$$\frac{7}{10}mv_2^2 = mgH - mgh \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)}\,.$$

Číselně vychází $v_1 = 3{,}55\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 2{,}37\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

5 bodů

b) Dobu t_1 pohybu po první nakloněné rovině určíme ze vztahu

$$L = \frac{v_1}{2}t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{2L}{v_1} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{10}{7}gH}}\,.$$

Na druhé nakloněné rovině platí

$$l = \frac{v_1+v_2}{2}t_2 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{2l}{v_1+v_2} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{10}{7}gH} + \sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)}}\,.$$

Na posledním úseku platí

$$t_3 = \frac{d}{v_2} = \frac{d}{\sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)}}\,.$$

Číselně vychází $t_1 = 1{,}69\ \mathrm{s}$, $t_2 = 0{,}34\ \mathrm{s}$, $t_3 = 0{,}25\ \mathrm{s}$.

Celková doba pohybu kuličky od uvolnění až po náraz na zarážku je

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 2{,}28\ \mathrm{s}\,.$$

5 bodů

4. a) Vztažnou soustavu spojíme s deskou. Maximální setrvačná síla bude na těleso působit v krajní poloze desky:

$$F_s = ma_{\mathrm{m}} = m\omega^2 y_{\mathrm{m}} = \frac{4\pi^2 y_{\mathrm{m}} m}{T^2}\,.$$

3 body

Aby se těleso na desce neposouvalo, musí být velikost této síly menší než maximální velikost síly statického tření $F = \mu mg$. Porovnáním obou sil určíme y_{m}:

$$y_{\mathrm{m}} = \frac{\mu g T^2}{4\pi^2} = 3,1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\,.$$

Maximální amplituda kmitů desky při kmitání ve vodorovném směru může být asi 31 mm.

2 body

b) Vztažnou soustavu spojíme opět s deskou. Maximální setrvačná síla bude na těleso působit v krajních polohách desky. Aby těleso neodskakovalo, musí být v horní krajní poloze velikost setrvačné síly maximálně rovna velikosti síly tíhové:

$$F_s = 4\pi^2 f^2 y_{\mathrm{m}} m \leq F_G = mg\,.$$

3 body

Porovnáním obou sil určíme maximální frekvenci f_{m}:

$$f_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_{\mathrm{m}}}} = 2,2\ \mathrm{Hz}\,.$$

Maximální frekvence desky při kmitání ve svislém směru může být asi 2, 2 Hz.

2 body