Řešení úloh 1. kola 48. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Jírů (2, 4), L. Richterek (5, 7) a P. Šedivý (1, 3, 6)

1. a) Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos\alpha_0\,, \qquad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2\,,$$

kde α_0 je elevační úhel vrhu, plyne

$$L = v_0 T \cos\alpha_0\,, \qquad 0 = h_0 + v_0 T \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g T^2\,.$$

Z toho

$$v_0 \cos\alpha_0 = \frac{L}{T}\,, \tag{1}$$

$$v_0 \sin\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2} g T^2 - h_0}{T}\,. \tag{2}$$

Vydělením obou rovnic dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2} g T^2 - h_0}{L} = 0{,}7662\,, \qquad \alpha_0 = 37{,}5^\circ\,.$$

Umocníme-li obě rovnice na druhou a sečteme, dostaneme

$$v_0^2 = \frac{L^2 + \left(\frac{1}{2} g T^2 - h_0\right)^2}{T^2}\,, \qquad v_0 = \frac{\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2} g T^2 - h_0\right)^2}}{T} = 13{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

Rychlost dopadu $\boldsymbol{v}_1$ má souřadnice

$$v_{1x} = v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = \frac{L}{T}\,, \tag{3}$$

$$v_{1y} = v_0 \sin\alpha_0 - gT = \frac{-h_0 - \frac{1}{2} g T^2}{T}\,. \tag{4}$$

Z toho

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{-\frac{1}{2} g T^2 - h_0}{L} = -0{,}9613\,, \qquad \alpha_1 = -43{,}9^\circ\,,$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2} g T^2 + h_0\right)^2}}{T} = 15{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Nejvyššího bodu trajektorie, kde platí $v_y = 0$, dosáhne koule v čase

$$T_2 = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} = \frac{\frac{1}{2}gT^2 - h_0}{gT}\,.$$

Výška výstupu je

$$H = h_0 + v_0 \sin\alpha_0 \cdot T_2 - \frac{1}{2}gT_2^2 = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g} =$$

$$= h_0 + \frac{\left(\frac{1}{2}gT^2 - h_0\right)^2}{2T^2 g} = 5{,}5\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

c) Na počátku vrhu má koule kinetickou energii

$$E_{\mathrm{k0}} = \frac{1}{2}mv_0^2 = m\frac{L^2 + \left(\frac{1}{2}gT^2 - h_0\right)^2}{2T^2} = 671\ \mathrm{J}\,,$$

Při dopadu má kinetickou energii

$$E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}mv_1^2 = m\frac{L^2 + \left(\frac{1}{2}gT^2 + h_0\right)^2}{2T^2} = 813\ \mathrm{J}\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$E_{\mathrm{k1}} - E_{\mathrm{k_0}} = mgh_0 = 142\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

2. a) Hmotnost prostřední koule je $m_2 = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi (kr_1)^3$.
Jelikož $m_1 = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3$, platí $m_2 = k^3 m_1$.
Podobně hmotnost nejmenší koule je $m_3 = k^3 m_2 = k^6 m_1$.
K postavení sněhuláka je nutné zvednout prostřední kouli o výšku $2r_1$ a nejmenší kouli o výšku $2r_1 + 2r_2$. Hledaná práce tedy je

$$W = m_2 g \cdot 2r_1 + m_3 g \cdot (2r_1 + 2r_2)\,.$$

Po dosazení:

$$W = k^3 m_1 g \cdot 2r_1 + k^6 m_1 g \cdot (2r_1 + 2kr_1)\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$W = 2(k^3 + k^6 + k^7) m_1 g r_1\,.$$

Číselně vychází $W = 1{,}47 m_1 g r_1$.

5 bodů

b) Zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa souměrnosti sněhuláka byla totožná se svislou osou z a počátek se nacházel v nejnižším bodě sněhuláka. Na této ose leží těžiště sněhuláka. Dále zvolme za osu otáčení vodorovnou přímku procházející počátkem. Podle momentové věty pak platí:

$$(m_1 + m_2 + m_3)gz_T = m_1gr_1 + m_2g(2r_1 + r_2) + m_3g(2r_1 + 2r_2 + r_3)\,.$$

Po dosazení:

$$(m_1 + k^3m_1 + k^6m_1)gz_T = \\ = m_1gr_1 + k^3m_1g(2r_1 + kr_1) + k^6m_1g(2r_1 + 2kr_1 + k^2r_1)\,.$$

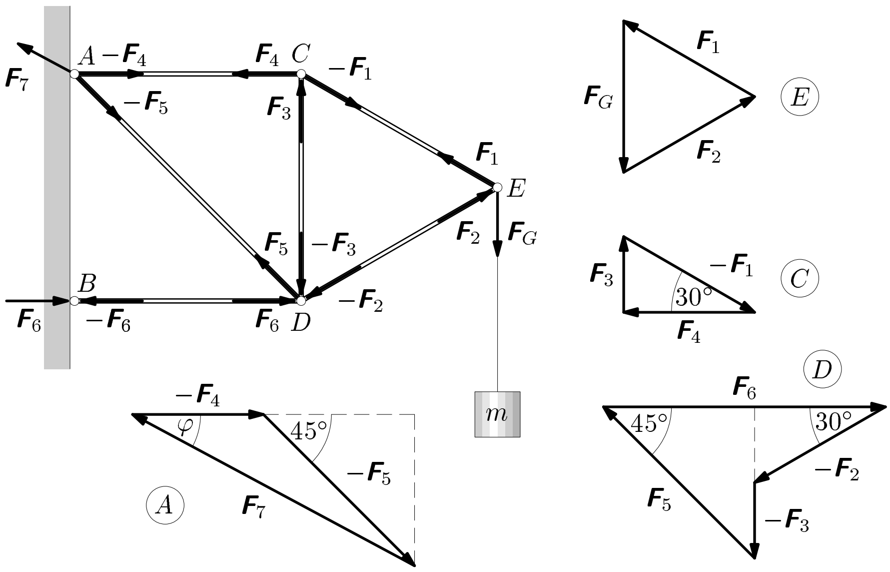
Po úpravě dostaneme

$$z_T = \frac{1 + 2k^3 + k^4 + 2k^6 + 2k^7 + k^8}{1 + k^3 + k^6}r_1\,.$$

Číselně vychází $z_T = 1{,}80r_1$.

5 bodů

3. a) Síly působící na jednotlivé šrouby jsou v rovnováze. Jejich grafickým složením postupně dostaneme uzavřené obrazce, ze kterých odvodíme vztahy potřebné pro výpočty (obr. R1). (Působiště sil jsou ve šroubech, i když v obrázku jsou tlakové síly znázorněny jinak.)



Obr. R1

Síly působící bodě E tvoří rovnostranný trojúhelník. Platí tedy

$$F_1 = F_2 = F_G\,.$$

Síla $\boldsymbol{F}_1$ je tahová, síla $\boldsymbol{F}_2$ je tlaková.

2 body

Síly působící bodě C tvoří pravoúhlý trojúhelník. Platí

$$F_3 = F_1 \sin 30° = 0{,}5F_G\,, \qquad F_4 = F_1 \cos 30° = \frac{F_G\sqrt{3}}{2}\,.$$

Síla $\boldsymbol{F}_3$ je tlaková, síla $\boldsymbol{F}_4$ je tahová.

2 body

Síly působící bodě D tvoří čtyřúhelník. Platí

$$F_5 = (F_2 \sin 30° + F_3)\sqrt{2} = F_G\sqrt{2}\,,$$

$$F_6 = F_2 \cos 30° + (F_2 \sin 30° + F_3)\,\mathrm{tg}\,45° = F_G\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,.$$

Síla $\boldsymbol{F}_5$ je tahová, síla $\boldsymbol{F}_6$ je tlaková.

2 body

Síly působící bodě A tvoří trojúhelník, který můžeme doplnit na trojúhelník pravoúhlý. Síla $\boldsymbol{F}_7$ svírá s vodorovným směrem úhel φ, pro který platí

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_5/\sqrt{2}}{F_5/\sqrt{2} + F4} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \varphi = 28{,}19°\,.$$

Síla $\boldsymbol{F}_7$ je tahová a má velikost

$$F_7 = \frac{F_5/\sqrt{2}}{\sin\varphi} = \frac{F_G}{\sin\varphi} = 2{,}12F_G\,.$$

2 body

V bodě B působí na šroub jen 2 síly, které musí mít podle principu akce a reakce stejnou velikost a opačný směr. Je to síla $-\boldsymbol{F}_6$ od tyče a síla $\boldsymbol{F}_6$ od stěny. Obě síly jsou tlakové.

1 bod

b) Z výsledků úlohy a) je zřejmé, že tyče AC, CE a AD jsou namáhány tahem a tyče BD a DE jsou namáhány tlakem.

1 bod

4. a) Podle předpokladu platí: $W_{\max} = ma_{\mathrm{g}0} \cdot R = 62{,}57$ MJ.
Gravitační zrychlení je nepřímo úměrné 2. mocnině vzdálenosti od středu Země, proto ve výšce R nad zemským povrchem je gravitační zrychlení 4krát menší než při zemském povrchu. Pro práci platí: $W_{\min} = ma_{\mathrm{g}}(R) \cdot R = 15{,}64$ MJ.

2 body

b) Jelikož gravitační zrychlení klesá s 2. mocninou vzdálenosti od středu Země, je zrychlení ve vzdálenosti r od středu Země určeno vzorcem:

$$a_{\mathrm{g}}(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 a_{\mathrm{g}0} \,.$$

Práci na příslušném úseku určíme podle vzorce

$$\Delta W = m a_{\mathrm{g}}(r) \cdot \frac{R}{10} \,,$$

kde $a_{\mathrm{g}}(r)$ je velikost gravitačního zrychlení v nejnižším bodě úseku (výpočet ΔW_{max}), v nejvyšším bodě úseku (výpočet ΔW_{min}) a nakonec průměr obou hodnot (výpočet $\Delta \underline{W}$). Výsledky udává tabulka:

r / R	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	
$a_{\mathrm{g}}(r)$ / m.s^{-2}	9,81	8,11	6,81	5,80	5,01	4,36	3,83	3,39	3,03	2,72	2,45	Σ
ΔW_{max} / MJ	--	6,26	5,17	4,35	3,70	3,19	2,78	2,44	2,16	1,93	1,73	33,72
ΔW_{min} / MJ	--	5,17	4,35	3,70	3,19	2,78	2,44	2,16	1,93	1,73	1,56	29,03
$\Delta \underline{W}$ / MJ	--	5,71	4,76	4,02	3,45	2,99	2,61	2,30	2,05	1,83	1,65	31,38

Použité způsoby výpočtu vedou při výpočtu celkové práce k hodnotám

$$W_{\mathrm{max}}(10) = 33{,}72 \text{ MJ} \,, \quad W_{\mathrm{min}}(10) = 29{,}03 \text{ MJ} \,,$$
$$\underline{W}(10) = \frac{W_{\mathrm{max}}(10) + W_{\mathrm{min}}(10)}{2} = 31{,}38 \text{ MJ} \,.$$

5 bodů

c) Při rozdělení dráhy na 20, 50 a 100 stejných dílů dává numerický výpočet celkové práce třemi uvedenými způsoby výsledky:

i	$W_{\mathrm{max}}(i)$	$W_{\mathrm{min}}(i)$	$\underline{W}(i)$
20	32,48	30,13	31,31
50	31,76	30,82	31,29
100	31,52	31,05	31,29

Horní a dolní hranice celkové práce se s rostoucím „zjemňováním“ dělení k sobě přibližují a přesnost výpočtu se zvětšuje. Nejpomaleji se mění hodnota $\underline{W}(i)$, která se zřejmě nejvíce přibližuje k přesné hodnotě celkové práce.

3 body

Poznámka: Přesný výsledek lze získat integrálním počtem:

$$W = \int_R^{2R} m a_{\mathrm{g}0} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{2} m a_{\mathrm{g}0} R \,.$$

Po zaokrouhlení na 4 platné číslice vychází 31,28 MJ.

5. a) Hmotnost vody, která se odpaří během 24 hodin, je

$$|\Delta m| = \varrho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot |\Delta v| = \frac{N M_\mathrm{m}}{N_\mathrm{A}} = \frac{N_1 T M_\mathrm{m}}{N_\mathrm{A}}\,,$$

kde ϱ je hustota vody, $|\Delta v|$ je úbytek výšky hladiny v nádobě, M_m je molární hmotnost vody, N_A je Avogadrova konstanta, T je doba odpařování, N je celkový počet odpařených molekul a N_1 je počet molekul odpařených za 1 sekundu. Z toho

$$N_1 = \frac{\varrho \pi D^2 |\Delta v| N_\mathrm{A}}{4 T M_\mathrm{m}} = 7{,}4 \cdot 10^{18}\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

5 bodů

b) Zabírá-li každá molekula vody objem krychličky o hraně a, platí pro molární hmotnost vody $M_\mathrm{m} = \varrho N_\mathrm{A} a^3$. Odtud

$$a = \sqrt[3]{\frac{M_\mathrm{m}}{\varrho N_\mathrm{A}}} = 3{,}1 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\,.$$

Jedna vrstva molekul výšky a se odpaří ze dobu

$$t_1 = \frac{a}{|\Delta v|} T = \sqrt[3]{\frac{M_\mathrm{m}}{\varrho N_\mathrm{A}}} \cdot \frac{T}{|\Delta v|} = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}\,.$$

5 bodů

7. a) Označme v_1 souřadnici rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ prázdného vagonu bezprostřední před srážkou a u_1, u_2 souřadnice vektorů $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$. Ze zákona zachování hybnosti a ze zákona zachování energie plyne:

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh}\,, \tag{1}$$

$$m v_1 = m u_1 + M u_2\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} M u_2^2\,. \tag{3}$$

Úpravou rovnic (2) a (3) dostaneme

$$m(v_1 - u_1) = M u_2\,, \tag{4}$$

$$m(v_1^2 - u_1^2) = m(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = M u_2^2 \tag{5}$$

a po vydělení rovnice (5) rovnici (4) (za předpokladu $v_1 \neq u_1$)

$$u_2 = v_1 + u_1\,. \tag{6}$$

Řešením soustavy (4), (6) dostaneme

$$u_1 = \frac{(m-M)v_1}{m+M} = \frac{(m-M)\sqrt{v^2+2gh}}{m+M} = -\frac{(M-m)\sqrt{v^2+2gh}}{m+M}\,,$$

$$u_2 = \frac{2mv_1}{m+M} = \frac{2m\sqrt{v^2+2gh}}{m+M}\,.$$

Předpokládáme $M > m$, proto $u_1 < 0$. Vektor $\boldsymbol{u}_1$ bude mít opačný směr než vektor $\boldsymbol{v}_1$.

5 bodů

b) Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{m(v^2+2gh)(M-m)^2}{2(m+M)^2} \geq mgh\,.$$

Z toho

$$v \geq \frac{\sqrt{8ghmM}}{M-m}\,.$$

5 bodů