Řešení úloh regionálního kola 48. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Jírů (4) a P. Šedivý (1, 2, 3)

1. a) Energie fotonu žlutého světla sodíkové výbojky je

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}37 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\,.$$

Výbojka vyzáří za jednu sekundu $N_1 = \frac{\Phi_\mathrm{e}}{E} = \frac{\Phi_\mathrm{e}\lambda}{hc} = 3{,}0 \cdot 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}$ fotonů.

3 body

b) Všechny fotony vyzářené výbojkou se ve vzdálenosti pozorovatele rozptýlí na kulovou plochu o poloměru d. Počet fotonů, které dopadnou do oka, je tolikrát menší, kolikrát menší je plošný obsah zornice než obsah uvedené kulové plochy. Platí

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{4\pi d^2} = \frac{D^2}{16d^2}\,, \qquad N_2 = \frac{N_1 D^2}{16d^2} = \frac{\Phi_\mathrm{e}\lambda D^2}{16hcd^2} = 9{,}1 \cdot 10^{8}\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

4 body

c) Označme $N_3 = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Pak

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{4\pi d'^2} = \frac{D^2}{16d'^2}\,, \qquad d'^2 = \frac{D^2 N_1}{16N_3}\,,$$

$$d' = \frac{D}{4}\sqrt{\frac{N_1}{N_3}} = \frac{D}{4}\sqrt{\frac{\Phi_\mathrm{e}\lambda}{hcN_3}} = 3{,}0 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m} \approx 4{,}7R_\mathrm{Z}\,.$$

3 body

2. a) Rozklad hydridu uranu proběhne podle rovnice

$$2UH_3 \;\rightarrow\; 2U + 3H_2\,.$$

2 body

Hmotnost m_1 vyloučeného vodíku určíme ze vztahu $\dfrac{m_1}{m} = \dfrac{3A_\mathrm{r}(\mathrm{H})}{M_\mathrm{r}(\mathrm{UH_3})}$:

$$m_1 = m\frac{3A_\mathrm{r}(\mathrm{H})}{M_\mathrm{r}(\mathrm{UH_3})} = 1{,}00\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot\frac{3{,}024}{241{,}05} = 1{,}254\cdot10^{-5}\ \mathrm{kg}\,.$$

Tomu odpovídá látkové množství

$$n = \frac{m_1}{M_\mathrm{m}(\mathrm{H_2})} = \frac{1{,}254\cdot10^{-5}\ \mathrm{kg}}{2{,}016\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}} = 6{,}22\cdot10^{-3}\ \mathrm{mol}\,.$$

4 body

b) Tlak vodíku určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = nR \quad\Rightarrow\quad p = \frac{nRT}{V} = \frac{3A_\mathrm{r}(\mathrm{H})mRT}{M_\mathrm{m}(\mathrm{UH_3})M_\mathrm{r}(\mathrm{H_2})V}$$

Při teplotě 400 °C je to

$$p = \frac{3{,}024\cdot1{,}00\cdot10^{-3}\cdot8{,}314\cdot673}{2{,}016\cdot10^{-3}\cdot241{,}05\cdot1{,}00\cdot10^{-3}}\ \mathrm{Pa} = 35\ \mathrm{kPa}\,.$$

Ochlazení na teplotu laboratoře T' proběhne jako děj izochorický a tlak vodíku klesne na

$$p' = p\frac{T'}{T} = 15\ \mathrm{kPa}\,.$$

4 body

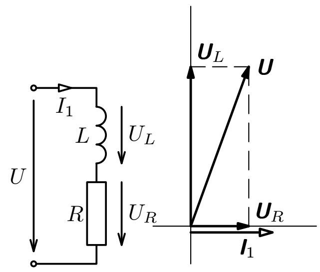
3. a) Vyjdeme z náhradních schémat a fázorových diagramů na obr. R3 a R4. V prvním obvodu platí

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = (RI_1)^2 + (\omega L I_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 = R^2 + \omega L^2 \,,$$

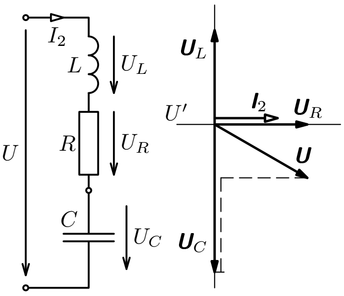
ve druhém

$$U^2 = U_R^2 + (U_C - U_L)^2 = R^2 I_2^2 + \left(\frac{I_2}{\omega C} - \omega L I_2\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{U}{I_2}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega^2 L\right)^2 .$$



Obr. R3



Obr. R4

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{U}{I_2}\right)^2 = 2\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{U}{I_2}\right)^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{2} \cdot C \,.$$

Z první rovnice vyjádříme $R = \sqrt{\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \omega^2 L^2}\,.$

Pro dané hodnoty $L = 0{,}25$ H, $R = 14{,}7\ \Omega$. **5 bodů**

b) Efektivní hodnota proudu v druhém obvodu je $I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}\,.$

Budeme-li měnit kapacitu kondenzátoru, dosáhne proud maxima při takové hodnotě C', která splňuje podmínku

$$\frac{1}{\omega C'} = \omega L \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{1}{\omega^2 L} \quad \text{(sériová rezonance).}$$

Obvodem pak prochází proud $I' = \dfrac{U}{R}\,.$

Pro dané hodnoty $C' = 40{,}5\ \mu$F, $I' = 1{,}36$ A. **3 body**

Cívka je lineární jednobran, napětí na ní je přímo úměrné procházejícímu proudu. Platí tedy $U = ZI_1\,,\quad U' = ZI'$, kde $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ je impedance cívky. Z toho

$$\frac{U'}{U} = \frac{I'}{I_1} \quad \Rightarrow \quad U' = \frac{UI'}{I_1}\,.$$

Pro dané hodnoty $U' = 109$ V. **2 body**

4. a) Postupným derivováním výchozí funkce $\varphi(t) = At^2 - Bt^3$ dostaneme úhlovou rychlost a úhlové zrychlení:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = 2At - 3Bt^2\,, \qquad \varepsilon(t) = \frac{\mathrm{d}\,\omega(t)}{\mathrm{d}t} = 2A - 6Bt\,.$$

Rozbíhání končí okamžikem t_k, kdy úhlové zrychlení klesne na nulovou hodnotu. Z podmínky $\varepsilon(t_\mathrm{k}) = 0$ dostaneme $t_\mathrm{k} = \dfrac{A}{3B}$.

Hledaný počet otáček je $N = \dfrac{\varphi(t_\mathrm{k})}{2\pi} = \dfrac{A^3}{27\pi B^2}$. **4 body**

b) Časová závislost kinetické energie setrvačníku je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(2At - 3Bt^2)^2 = \frac{1}{2}J(4A^2t^2 - 12ABt^3 + 9B^2t^4)\,.$$

Derivováním dostaneme závislost okamžitého výkonu na čase

$$P = \frac{\mathrm{d}\,E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} = 2J(2A^2t - 9ABt^2 + 9B^2t^3)\,. \tag{1}$$

Maximum nalezneme pomocí derivace $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2J(2A^2 - 18ABt + 27B^2t^2)\,.$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0$ plyne

$$t_{1,2} = \frac{18AB \pm \sqrt{324A^2B^2 - 216A^2B^2}}{54B^2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{9}\,\frac{A}{B}\,.$$

Z kořenů splňuje podmínku $t \in \langle 0; t_\mathrm{k}\rangle$ kořen $t_2 = t_\mathrm{m} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{9}\,\dfrac{A}{B}$.

Zda extrém v čase t_2 je maximem, se přesvědčíme např. pomocí druhé derivace:

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2} = 2J(-18AB + 54B^2t)\,.$$

V čase t_2 je druhá derivace $\dfrac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2} = 2J\left(-54\dfrac{\sqrt{3}}{9}AB\right) < 0\,,$

tedy se jedná o maximum. **4 body**

Dosazením t_m do rovnice (1) a po úpravě dostaneme

$$P_\mathrm{max} = 2J\left[2A^2\frac{3-\sqrt{3}}{9}\,\frac{A}{B} - 9AB\left(\frac{3-\sqrt{3}}{9}\,\frac{A}{B}\right)^2 + 9B^2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{9}\,\frac{A}{B}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{27}\,\frac{A^3}{B}J\,.$$ **2 body**

Poznámka: Okamžitý výkon motoru lze také určit použitím vztahu $P = M\omega$, který je analogický ke vztahu $P = Fv$ pro posuvný pohyb. Dostaneme: $P = M\omega = J\varepsilon\omega = 2J(2A^2t - 9ABt^2 + 9B^2t^3)\,.$