Řešení úloh 1. kola 47. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: R. Baník (3), I. Čáp (1), M. Jarešová (6), J. Jírů (2) a P. Šedivý (4, 5, 7)

1. a) Pohyb tělesa je rovnoměrně zrychlený se zrychlením $\boldsymbol{g}$. Je-li $\boldsymbol{v}_1$ rychlost u horního okraje okna, pak

$$b = v_1 t + \frac{1}{2} g t^2 , \qquad v_1 = \frac{b}{t} - \frac{1}{2} g t = 20{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ,$$

$$v_2 = v_1 + gt = \frac{b}{t} + \frac{1}{2} g t = 21{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

3 body

b) Rychlost $\boldsymbol{v}_1$ získalo těleso za dobu t_1 od okamžiku uvolnění. Platí

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{b}{gt} - \frac{t}{2} = 2{,}1 \text{ s}$$

2 body

c) Ze vztahu $v_2 = \sqrt{2gh}$ odvodíme

$$h = \frac{\left(\frac{b}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2}{2g} = 23{,}5 \text{ m} .$$

2 body

d) Těleso dopadne na zem rychlostí $\boldsymbol{v}_3$:

$$v_3 = \sqrt{2(h+c)g} = \sqrt{\left(\frac{b}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2 + 2gc} = 32{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

3 body

2. Pohyb lodi po řece je složen z pohybu vzhledem k vodní hladině a z „unášivého“ pohybu vodního proudu. Rychlost lodi je vektorovým součtem rychlosti $\boldsymbol{v}$, kterou by měla na klidné hladině, a rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ vodního proudu. Směr rychlosti $\boldsymbol{v}$ je stejný jako směr, kterým je natočena příď lodi.

a) Loď se dostane k protějšímu břehu za nejkratší dobu t_1, bude-li nasměrována kolmo k vodnímu toku (obr. R1a). V takovém případě je výsledná rychlost lodi $\boldsymbol{v}_1$ odchýlena od směru kolmého k rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ o úhel α. Platí

$$t_1 = \frac{d}{v}\,, \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + v^2}\,, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{v}\,.$$

Bod B, kde loď přistane, je od protějšího bodu A' vzdálen o $|BA'| = v_0 t_1 = d \operatorname{tg}\alpha$.

Po dosazení: $t_1 = 120\ \mathrm{s}\,, \quad v_1 = 5{,}39\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, \quad \alpha = 21{,}8^\circ\,, \quad |BA'| = 240\ \mathrm{m}\,.$

2 body

b) Má-li loď doplout za co nejkratší dobu t_2 do protějšího bodu A', musí se pohybovat přímo po spojnici AA'. Výsledná rychlost lodi $\boldsymbol{v}_2$ je kolmá k rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ (obr. R1b). Příď lodi je nutno natočit proti proudu o úhel β. Platí

$$\sin\beta = \frac{v_0}{v}\,, \quad v_2 = \sqrt{v^2 - v_0^2} = v\cos\beta\,, \quad t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{t_1}{\cos\beta}\,.$$

Po dosazení: $\beta = 23{,}6^\circ\,, \quad v_2 = 4{,}58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad t_2 = 131\ \mathrm{s}\,.$

2 body

c) Loď se vrátí z bodu B do bodu A za nejkratší dobu t_3, bude-li se pohybovat přímo po spojnici BA. Výsledná rychlost $\boldsymbol{v}_3$ bude od směru kolmého k $\boldsymbol{v}_0$ odchýlena o úhel α, příď lodi je nutno natočit o úhel $\gamma > \alpha$ (obr. R1c). Platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v\sin\gamma - v_0}{v\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma - \operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma}\,,$$

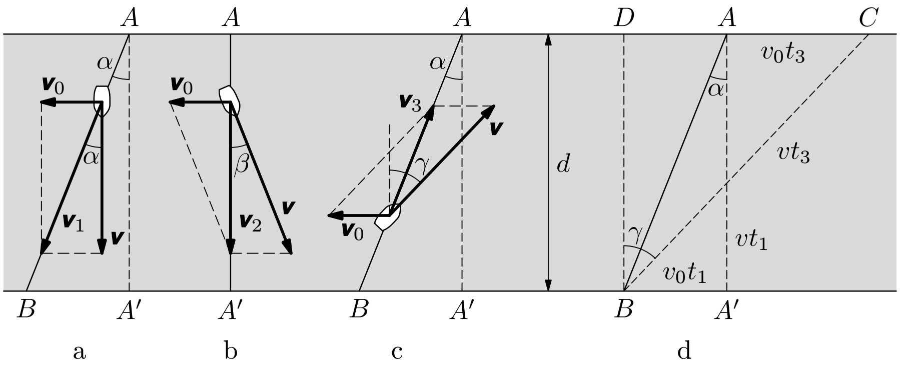
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma} = \frac{2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}}{2\cos^2\dfrac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\,, \quad \gamma = 2\alpha\,,$$

$$t_3 = \frac{d}{v\cos\gamma} = \frac{d}{v\cos 2\alpha} = \frac{d}{v(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{d}{v\left(2\dfrac{v^2}{v^2+v_0^2} - 1\right)} = \frac{d}{v}\cdot\frac{v^2+v_0^2}{v^2-v_0^2}\,,$$

$$v_3 = \frac{|AB|}{t_3} = \frac{d\sqrt{v^2+v_0^2}}{v}\cdot\frac{v(v^2-v_0^2)}{d(v^2+v_0^2)} = \frac{v^2-v_0^2}{\sqrt{v^2+v_0^2}}\,.$$

Po dosazení: $t_3 = 166\ \mathrm{s}$, $v_3 = 3{,}90\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\gamma = 43{,}6^\circ$. **5 bodů**

d) Úloha a) je řešitelná bez omezení. Úlohy b) a c) jsou řešitelné, jestliže $v > v_0$. **1 bod**



Obr. R1

Jiné řešení úlohy c):

Posunutí z bodu B do bodu A je složeno z posunutí $\overrightarrow{BC}$ lodi vzhledem k vodní hladině a z posunutí $\overrightarrow{CA}$ vodní hladiny vzhledem k okolní krajině (obr. R1d). Platí:

$$(vt_3)^2 = (vt_1)^2 + (v_0t_1 + v_0t_3)^2\,, \quad (v^2 - v_0^2)t_3^2 - 2v_0^2\frac{d}{v}t_3 - \frac{v^2 + v_0^2}{v^2}d^2 = 0\,.$$

Ze dvou kořenů této rovnice vyhovuje úloze kořen

$$t_3 = \frac{d}{v} \cdot \frac{v^2 + v_0^2}{v^2 - v_0^2}\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku BDC odvodíme:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v_0(t_1 + t_3)}{vt_1} = \frac{v_0t_1\left(1 + \dfrac{v^2 + v_0^2}{v^2 - v_0^2}\right)}{vt_1} = \frac{2vv_0}{v^2 - v_0^2} = \frac{2\dfrac{v_0}{v}}{1 - \left(\dfrac{v_0}{v}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha\,.$$

3. a) Vnitřní poloměr polokoule je

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{2\pi}} = 9{,}85 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\,.$$

1 bod

b, c) Hmotnost měděné polokoule je stejná jako hmotnost vytlačené vody, která má objem

$$V_0 = \pi R h^2 - \frac{\pi h^3}{3} = \frac{\pi R^3}{4} - \frac{\pi R^3}{24} = \frac{5\pi R^3}{24}\,.$$

Platí tedy

$$\varrho V_{\mathrm{Cu}} = \varrho \frac{2}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) = \varrho_0 V_0 = \varrho_0 \frac{5\pi R^3}{24}\,,$$

$$R^3 = \frac{16\varrho}{16\varrho - 5\varrho_0} r^3 = \frac{24 V_1 \varrho}{\pi(16\varrho - 5\varrho_0)}\,, \quad R = 9{,}97 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

$$m_{\mathrm{Cu}} = \varrho_0 \frac{5\pi R^3}{24} = \varrho_0 \frac{5 V_1 \varrho}{16\varrho - 5\varrho_0} = 0{,}648\ \mathrm{kg}\,.$$

3 body

d) Objem vody, který ještě můžeme nalít do polokoule, je stejný jako objem dosud nepotopené části polokoule o poloměru R:

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3 - V_0 = \frac{11}{24}\pi R^3 = \frac{11 V_1 \varrho}{16\varrho - 5\varrho_0} = 1{,}43 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 1{,}43\ \mathrm{dm}^3\,.$$

3 body

4. a) Výpočet hodnot stavových veličin v jednotlivých stavech:

$$p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}\,, \quad p_4 V_1^{1,4} = p_3 V_2^{1,4}\,, \quad \Rightarrow \quad \frac{p_4}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1,4}\,, \quad p_3 = 2{,}5 p_2\,, \quad p_4 = 2{,}5 p_1\,,$$

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1,4} \frac{V_2}{V_1} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{0,4}\,,$$

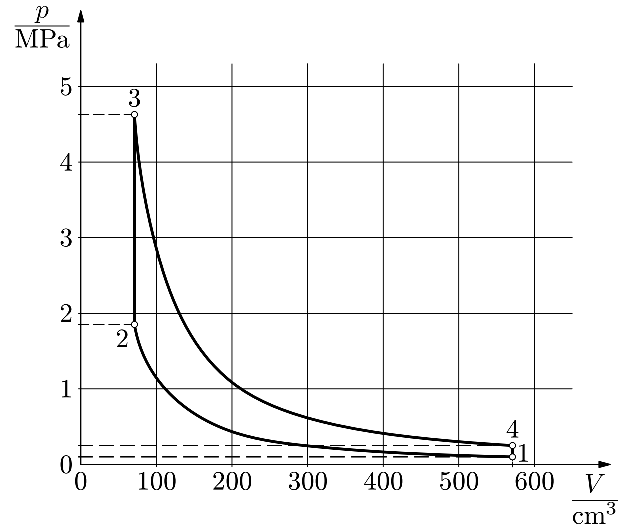
$$T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_2} = 2{,}5 T_2\,, \qquad T_4 = T_1 \frac{p_4}{p_1} = 2{,}5 T_1\,.$$

Stav	V/cm^3	p/kPa	T/K
1	571	100	293
2	71	1 852	675
3	71	4 629	1 687
4	571	250	733

Výpočet průběhu adiabat provedeme pomocí vztahů

$$p = p_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{1,4} \text{ pro děj } 1 \rightarrow 2\,, \qquad p = p_4 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{1,4} \text{ pro děj } 3 \rightarrow 4\,.$$

V/cm^3	571	500	400	300	200	100	71
p/kPa ($1 \rightarrow 2$)	100	120	165	246	434	1 146	1 852
p/kPa ($3 \rightarrow 4$)	250	301	411	616	1 086	2 866	4 629



5 bodů

b) Látkové množství a hmotnost vzduchu určíme užitím stavové rovnice:

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 0{,}0234\,\mathrm{mol}\,, \qquad m = nM_\mathrm{m} = 6{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}\,.$$

1 bod

c) Celková práce W' při jednom cyklu je rovna rozdílu tepla Q_{23} přijatého pracovní látkou při izochorickém ohřátí a tepla Q'_{41} odevzdaného pracovní látkou při izochorickém ochlazení:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = 2{,}5nR(T_3 - T_2) = 2{,}5(p_3V_2 - p_2V_2) = 3{,}75p_2V_2 = 493\ \mathrm{J}\,,$$

$$Q'_{41} = -\Delta U_{41} = 2{,}5nR(T_4 - T_1) = 2{,}5(p_4V_1 - p_1V_1) = 3{,}75p_1V_1 = 214\ \mathrm{J}\,,$$

$$W' = Q_{23} - Q'_{41} = 111\ \mathrm{J}\,, \qquad \eta = \frac{W'}{Q_{23}} = 0{,}57\,.$$

4 body

5. Elektrická práce topné spirály $W = \dfrac{U^2\tau}{R}$ se spotřebuje na teplo potřebné k ohřátí ledu na teplotu tání

$$Q_1 = (K + mc_1)(0\,°\mathrm{C} - t_1) = 14\,700\ \mathrm{J}\,,$$

skupenské teplo tání ledu $L_\mathrm{t} = ml_\mathrm{t} = 2{,}82 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$

a teplo potřebné k ohřátí vody na výslednou teplotu

$$Q_2 = (K + mc_2)(t_2 - 0\,°\mathrm{C}) = 9{,}06 \cdot 10^4\ \mathrm{J}\,.$$

4 body

Příkon topného tělíska je

$$P = \frac{Q_1 + L_\mathrm{t} + Q_2}{\tau} = 144\ \mathrm{W}$$

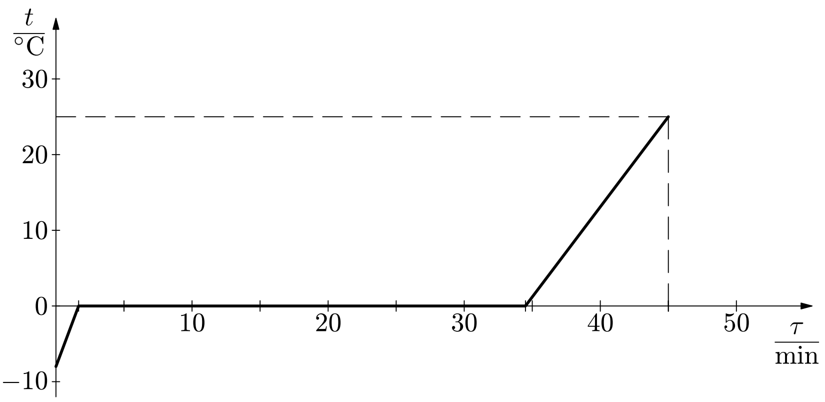
a napětí zdroje $U = \sqrt{PR} = 29\ \mathrm{V}$. **2 body**

Doby trvání jednotlivých částí děje jsou

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{P} = 100\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{min}\ 40\ \mathrm{s}\,, \quad \tau_2 = \frac{L_\mathrm{t}}{P} = 1\,970\ \mathrm{s} = 32\ \mathrm{min}\ 50\ \mathrm{s}\,,$$

$$\tau_3 = \frac{Q_2}{P} = 630\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{min}\ 30\ \mathrm{s}\,.$$

Časový průběh celého děje zobrazuje graf na obr. R2.



Obr. R2 **4 body**

7. a) Protože na setrvačník působily konstantní síly, byl jeho pohyb nejprve rovnoměrně zrychlený a po dopadu závaží na podlahu rovnoměrně zpomalený. Označme φ_1 úhlovou dráhu setrvačníku během roztáčení. Platí

$$\varphi_1 = \frac{h}{r} = \frac{\omega_1 t_1}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 t_1^2 \,.$$

Z toho

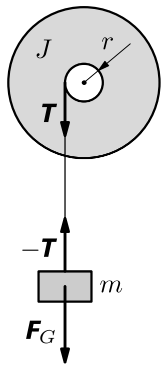
$$\omega_1 = \frac{2\varphi_1}{t_1} = \frac{2h}{rt_1} = 57{,}1\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2\varphi_1}{t_1^2} = \frac{2h}{rt_1^2} = 11{,}4\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}.$$

Úhlové zrychlení během zastavování mělo velikost

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_1}{t_2} = \frac{2h}{rt_1t_2} = 1{,}90\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}.$$

4 body

b) Na setrvačník působí během roztáčení moment síly $\boldsymbol{T}$ vlákna a moment brzdících sil o velikosti M. Na závaží působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a síla $-\boldsymbol{T}$ vlákna. Závaží klesá se zrychlením o velikosti $a = \varepsilon_1 r$ (obr. R3). Z pohybových rovnic



Obr. R3

$$J\varepsilon_1 = Tr - M\,, \qquad ma = m\varepsilon_1 r = F_G - T$$

dostaneme

$$(J + mr^2)\varepsilon_1 = (J + mr^2)\frac{2h}{rt_1^2} = mgr - M\,. \qquad (1)$$

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb setrvačníku po dopadu závaží na podlahu je

$$M = J\varepsilon_2 = J\frac{2h}{rt_1t_2}\,. \qquad (2)$$

Řešením soustavy rovnic (1), (2) dostaneme

$$J = \frac{mr^2 t_2\left(\dfrac{gt_1^2}{2h} - 1\right)}{t_1 + t_2} = 2{,}55\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,,$$

$$M = \frac{2mrh\left(\dfrac{gt_1^2}{2h} - 1\right)}{(t_1 + t_2)t_1} = 4{,}87\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

6 bodů