Řešení úloh regionálního kola 47. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3, 4)

1. a) U vodorovného vrhu je doba letu t_1 rovna době volného pádu z téže výšky h_1.
Z rovnice $h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$ plyne $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 1{,}25$ s.
Vodorovná složka rychlosti je v každém okamžiku rovna počáteční rychlosti, platí proto $v_{01} = \frac{d}{t_1} = 12{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2 \tag{1}$$

plyne $v_{\mathrm{d}1} = \sqrt{v_{01}^2 + 2gh_1} = 17{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Obdobně pro výšku h_2 postupně dostaneme $t_2 = 0{,}968$ s, $v_{02} = 15{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_{\mathrm{d}2} = 18{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jelikož $v_{\mathrm{d}1} < v_{\mathrm{d}2}$, Petr se ve své úvaze mýlil.

2 body

b) Úvahy provedené v úloze a) vedou při obecném řešení na vzorec

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{gd^2}{2h} + 2gh}\,.$$

Nalezená funkce má tu vlastnost, že rychlost dopadu je velká při velmi malých a při velmi velkých hodnotách h. Fyzikálně to znamená, že při velmi malé výšce musí být velká již počáteční rychlost, aby těleso do požadovaného místa velkou rychlostí doletělo. Při velmi velké výšce je též velká rychlost dopadu, její příčinou je především volný pád. Tedy s rostoucím h velikost rychlosti dopadu nejprve klesá, dosáhne jakési minimální hodnoty a poté roste. Minimum nalezneme užitím první derivace:

$$\left(\frac{gd^2}{2h} + 2gh\right)' = -\frac{gd^2}{2h^2} + 2g = 0\,, \qquad h = \frac{d}{2}\,.$$

Optimální počáteční výška pro vodorovný vrh je $h = \frac{d}{2} = 7{,}5$ m, tedy přibližně taková, z jaké chtěl Petr házet klíče původně.

3 body

c) Také při šikmém vrhu platí zákon zachování energie (1). Z něj plyne, že počáteční rychlost vrhu by měla být co nejmenší.
Zvolíme-li počátek soustavy souřadnic u paty svislé stěny domu, platí při vrhu s elevačním úhlem α

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = h_1 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Vyloučením času dostaneme rovnici trajektorie

$$y = h_1 + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = h_1 + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2 (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{2 v_0^2}\,.$$

Dosazením souřadnic dopadu $x = d,\ y = 0$ a úpravou dostaneme rovnici

$$g d^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 2 d v_0^2 \operatorname{tg}\alpha - 2 v_0^2 h_1 + g d^2 = 0\,, \qquad (2)$$

na kterou se budeme dívat jako na kvadratickou rovnici s neznámou $\operatorname{tg}\alpha$ a parametrem v_0^2. Diskriminant rovnice

$$D = 4 d^2 v_0^4 + 8 g d^2 v_0^2 h_1 - 4 g^2 d^4 = 4 d^2 (v_0^4 + 2 g h_1 v_0^2 - g^2 d^2)$$

je roven nule, jestliže

$$v_0^4 + 2 g h_1 v_0^2 - g^2 d^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{-\,2 g h_1 + \sqrt{4 g^2 h_1^2 + 4 g^2 d^2}}{2} = g(-h_1 + \sqrt{h_1^2 + d^2})\,.$$

Tím je určena nejmenší velikost počáteční rychlosti klíčů, při které ještě mohou klíče doletět k Michalovi. Při menší počáteční rychlosti by byl diskriminant záporný a rovnice (2) by neměla řešení. Pro $D = 0$ dostaneme řešením rovnice (2) optimální elevační úhel:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 d v_0^2 + 0}{2 g d^2} = \frac{v_0^2}{g d} = \frac{-\,h_1 + \sqrt{h_1^2 + d^2}}{d}\,.$$

Pro rychlost dopadu plyne z (1)

$$v_d^2 = v_0^2 + 2 g h_1 = g(h_1 + \sqrt{h_1^2 + d^2})\,.$$

Číselně vychází $v_0 = 9{,}48\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\alpha = 31^\circ$, $v_\mathrm{d} = 15{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

5 bodů

2. a) Molární hmotnosti obou složek jsou

$$M_{\mathrm{m1}} = A_{\mathrm{r}}(\mathrm{He}) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}},$$
$$M_{\mathrm{m2}} = A_{\mathrm{r}}(\mathrm{Ar}) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} = 39{,}95 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}.$$

Označme m_1, m_2 hmotnosti obou složek a n_1, n_2 jejich látková množství. Celková hustota plynu je součtem parciálních hustot složek: $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$.

Stavovou rovnici $\quad \dfrac{pV}{T} = nR = (n_1 + n_2)R = \left(\dfrac{m_1}{M_{\mathrm{m1}}} + \dfrac{m_2}{M_{\mathrm{m2}}}\right)R$

upravíme na tvar

$$\frac{p}{RT} = \frac{m_1}{M_{\mathrm{m1}}V} + \frac{m_2}{M_{\mathrm{m2}}V} = \frac{\varrho_1}{M_{\mathrm{m1}}} + \frac{\varrho_2}{M_{\mathrm{m2}}} = \frac{\varrho_1}{M_{\mathrm{m1}}} + \frac{\varrho - \varrho_1}{M_{\mathrm{m2}}}\,.$$

Z toho

$$\varrho_1 = \frac{M_{\mathrm{m1}}(pM_{\mathrm{m2}} - \varrho RT)}{RT(M_{\mathrm{m2}} - M_{\mathrm{m1})}} = 0{,}11\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}\,,$$
$$\varrho_2 = \varrho - \varrho_1 = 1{,}34\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

3 body

Také parciální tlaky složek určíme užitím stavové rovnice:

$$p_1 = \frac{n_1RT}{V} = \frac{m_1RT}{M_{\mathrm{m1}}V} = \frac{\varrho_1RT}{M_{\mathrm{m1}}} = \frac{pM_{\mathrm{m2}} - \varrho RT}{(M_{\mathrm{m2}} - M_{\mathrm{m1}})} = 68\ \mathrm{kPa},$$
$$p_2 = p - p_1 = 84\ \mathrm{kPa}.$$

2 body

Počty molekul v objemu $V = 1\ \mathrm{cm^3}$ jsou

$$N_1 = N_{\mathrm{A}}\frac{\varrho_1V}{M_{\mathrm{m1}}} = 1{,}65 \cdot 10^{19}, \quad N_2 = N_{\mathrm{A}}\frac{\varrho_2V}{M_{\mathrm{m2}}} = 2{,}02 \cdot 10^{19}.$$

2 body

b) Směs se chová jako ideální plyn s jednoatomovými molekulami, jehož molární hmotnost určíme pomocí stavové rovnice:

$$M_{\mathrm{m}} = \frac{mRT}{pV} = \frac{\varrho RT}{p} = 23{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}.$$

Při izochorickém ohřátí je přijaté teplo rovno přírůstku vnitřní energie:

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}\,\frac{m}{M_{\mathrm{m}}}R\Delta T = mc_V\Delta t.$$

Z toho $\quad c_V = \dfrac{3R}{2M_{\mathrm{m}}} = \dfrac{3p}{2\varrho T} = 524\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}.$

3 body

3. a) Paralelně spojené cívky se v obvodu chovají jako jediná cívka s indukčností L, která s kondenzátorem tvoří kmitavý obvod, jehož frekvence vlastních kmitů je

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,. \tag{1}$$

Při vybíjení kondenzátoru přes cívky bude na obou stejné okamžité napětí

$$u = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}(i_1+i_2)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2}$$

Z toho plyne

$$\mathrm{d}(i_1+i_2) = \frac{u}{L}\mathrm{d}t = \mathrm{d}i_1 + \mathrm{d}i_2 = \frac{u}{L_1}\mathrm{d}t + \frac{u}{L_2}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\,,$$

Celková indukčnost je tedy $L = \dfrac{L_1L_2}{L_1+L_2}$ a obvod bude kmitat s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_1+L_2}{CL_1L_2}} = 178\ \mathrm{Hz}\,.$$

5 bodů

b) Po připojení kondenzátoru k cívkám proudy v cívkách porostou až do vybití kondenzátoru a pro jejich přírůstky platí

$$L_1\mathrm{d}i_1 = L_2\mathrm{d}i_2\,.$$

Proto i pro amplitudy $I_{1\mathrm{m}}$, $I_{2\mathrm{m}}$ proudů v cívkách platí

$$L_1I_{1\mathrm{m}} = L_2I_{2\mathrm{m}}\,. \tag{3}$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}L_1I_{1\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2}L_2I_{2\mathrm{m}}^2\,. \tag{4}$$

Řešením soustavy rovnic (3), (4) dostaneme

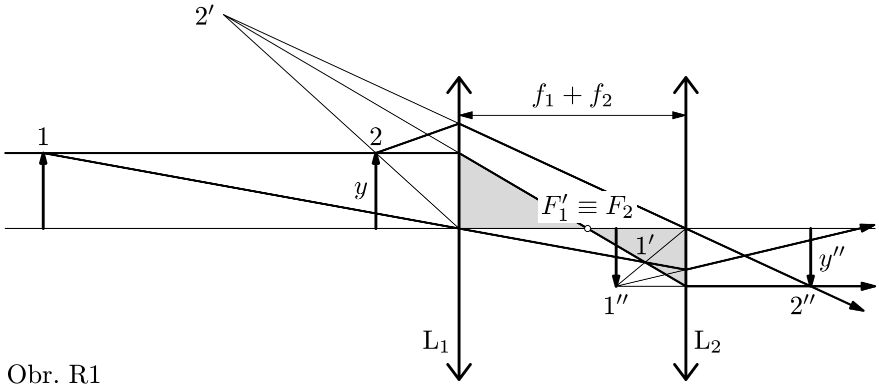
$$I_{1\mathrm{m}} = U\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}} = 36\ \mathrm{mA}\,, \quad I_{2\mathrm{m}} = U\sqrt{\frac{CL_1}{L_2(L_1+L_2)}} = 9\ \mathrm{mA}\,.$$

5 bodů

4. a) Pro různé polohy předmětu můžeme při grafické konstrukci obrazu používat týž paprsek jdoucí vrcholem předmětu rovnoběžně s optickou osou soustavy. Ten se po průchodu první spojkou láme do jejího obrazového ohniska F_1' a po průchodu druhou spojkou prochází vrcholem výsledného obrazu. Při posouvání předmětu se mění i poloha výsledného obrazu, ale jeho velikost se podle předpokladu úlohy nemění. To znamená, že uvažovaný paprsek jde po průchodu druhou spojkou rovnoběžně s optickou osou soustavy a před dopadem na druhou spojkou prochází jejím předmětovým ohniskem F_2 (obr. R1). Platí tedy

$$F_1' \equiv F_2\,, \qquad d = f_1 + f_2\,.$$

Jedná se o teleskopickou soustavu. Z podobnosti trojúhelníků vytvořených uvažovaným paprskem, optickou osou a oběma čočkami určíme příčné zvětšení výsledného obrazu $\beta = \dfrac{y''}{y} = -\dfrac{f_2}{f_1}$.



Obr. R1

5 bodů

b) Ze zobrazovací rovnice první spojky odvodíme

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\,.$$

Má-li být výsledný obraz skutečný, nesmí obraz vytvořený první spojkou ležet mezi druhou spojkou a jejím předmětovým ohniskem (jako např. bod 1′ na obr. R1). Obraz vytvořený první spojkou nikdy nevznikne mezi ní a jejím obrazovým ohniskem. Jsou tyto možnosti:

1) $a_1' < 0$, pak $0 < a_1 < f_1$,

2) $a_1' > d = f_1 + f_2$, pak

$$a_1 > f_1\,, \quad a_1 f_1 > (f_1 + f_2)(a_1 - f_1) = a_1 f_1 + a_1 f_2 - f_1^2 - f_1 f_2\,,$$

$$f_1 < a_1 < \frac{f_1(f_1+f_2)}{f_2}\,.$$

3) $a_1 = f_1$. Pak $a_1' \to \infty$, $a_2 = f_2$. Vznikne reálný obraz v obrazové ohniskové rovině druhé čočky.

Závěr: Aby vznikl reálný výsledný obraz. musí platit

$$0 < a_1 < \frac{f_1(f_1+f_2)}{f_2}.$$

5 bodů

Jiné řešení:

a) Obraz vytvořený první spojkou je předmětem pro druhou spojku (reálným nebo virtuálním). Platí

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\,, \quad a_2 = d - a_1'\,.$$

Vyjádříme příčné zvětšení při zobrazení jednotlivými čočkami a celou soustavou:

$$\beta_1 = -\frac{f_1}{a_1 - f_1}\,, \qquad \beta_2 = -\frac{f_2}{a_2 - f_2}\,,$$

$$\beta = \beta_1\beta_2 = \frac{f_1 f_2}{(a_1 - f_1)\left(d - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - f_2\right)} = \frac{f_1 f_2}{a_1(d - f_1 - f_2) - d f_1 + f_1 f_2}\,.$$

Nemá-li celkové příčné zvětšení záviset na a_1, musí být $d - f_1 - f_2 = 0$. Pak

$$d = f_1 + f_2$$

a celkové příčné zvětšení je

$$\beta = \frac{f_1 f_2}{-(f_1+f_2)f_1 + f_1 f_2} = -\frac{f_2}{f_1}\,.$$

5 bodů

b) Poloha výsledného obrazu je

$$a_2' = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = \frac{\left(d - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) f_2}{d - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - f_2} =$$

$$= \frac{[(f_1+f_2)(a_1 - f_1) - a_1 f_1] f_2}{(f_1+f_2)(a_1-f_1) - a_1 f_1 - f_2(a_1 - f_1)} = \frac{[a_1 f_2 - f_1(f_1+f_2)] f_2}{-f_1^2} > 0\,.$$

Z toho

$$a_1 f_2 - f_1(f_1+f_2) < 0\,, \qquad a_1 < \frac{f_1(f_1+f_2)}{f_2}\,.$$

5 bodů