Řešení úloh 1. kola 47. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3, 4, 6, 7), L. Richterek a M. Jarešová (5)

1. a) Ze zákona zachování hybnosti plyne, že rychlost těžiště soustavy vagonů

$$\boldsymbol{v} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1}{m_1 + m_2}$$

se během srážky nezmění. Vztažnou soustavu S′ spojenou s těžištěm můžeme tedy považovat za inerciální. Vagony mají vzhledem k ní rychlosti

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v} = \frac{m_2 \boldsymbol{v}_1}{m_1 + m_2}\,, \qquad \boldsymbol{v}_2' = -\boldsymbol{v}\,.$$

Je-li srážka dokonale pružná, platí v S′ zákon odrazu a vagony mají po srážce vzhledem k S′ rychlosti $\boldsymbol{u}_1' = -\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{u}_2' = -\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}$.

Ve vztažné soustavě S spojené s tratí mají vagony po srážce rychlosti

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1' + \boldsymbol{v} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_1\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2' + \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_1\,.$$

Pro dané hodnoty $\boldsymbol{u}_1 = -0{,}2\boldsymbol{v}_1$, $u_1 = 0{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\boldsymbol{u}_2 = 0{,}8\boldsymbol{v}_1$, $u_2 = 3{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Směr rychlosti u prvního vagonu se změnil na opačný, u druhého vagonu je shodný se směrem rychlosti prvního vagonu před srážkou. **3 body**

b) Soustavu nárazníků můžeme po dobu srážky nahradit jedinou pružinou o tuhosti k. Ve vztažné soustavě S′ se konce pružiny pohybují proti sobě. Bod pružiny, který zůstává v klidu, ji rozděluje na dvě části přiléhající k jednotlivým vagonům. Jejich tuhosti označme k_1, k_2. Během deformace koná každý vagon vzhledem k vztažné soustavě S′ polovinu harmonického kmitu s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\,.$$

Platí $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{1}{m_1\omega^2} + \dfrac{1}{m_2\omega^2}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}\,, \qquad \Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = 0{,}13\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

c) Velikosti rychlostí vagonů vzhledem k S′ před srážkou jsou také amplitudami rychlostí harmonických kmitů vagonů. Amplitudy zrychlení těchto kmitů

$$a_{\mathrm{m1}} = \omega v_1' = v_1\sqrt{\frac{k m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}\,, \qquad a_{\mathrm{m2}} = \omega v_2' = v_1\sqrt{\frac{k m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}$$

představují hledané velikosti maximálních zrychlení vagonů nejen v těžišťové vztažné soustavě S′, ale i ve vztažné soustavě S spojené s tratí, neboť zrychlení je invariantní vůči Galileově transformaci.
Číselně vychází $a_{\mathrm{m1}} = 58\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_{\mathrm{m2}} = 39\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. **3 body**

2. a) Zvolíme-li souřadnicovou soustavu podle obr. R1 a v okamžiku, kdy lano svírá s hladinou úhel α_0, položíme $t = 0$, bude délka l lana mezi loďkou a kladkou záviset na čase podle vztahu

$$l = \frac{h}{\sin\alpha_0} - v_1 t = l_0 - v_1 t$$

a pro souřadnici x loďky bude platit

$$x = -\sqrt{(l_0 - v_1 t)^2 - h^2}\,.$$

Derivováním dostaneme:

$$v_L = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{(l_0 - v_1 t)v_1}{\sqrt{(l_0 - v_1 t)^2 - h^2}} = \frac{l v_1}{|x|}\,,$$

$$a_L = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{-v_1^2\sqrt{(l_0 - v_1 t)^2 - h^2} + (l_0 - v_1 t)v_1 \dfrac{(l_0 - v_1 t)v_1}{\sqrt{(l_0 - v_1 t)^2 - h^2}}}{(l_0 - v_1 t)^2 - h^2} =$$

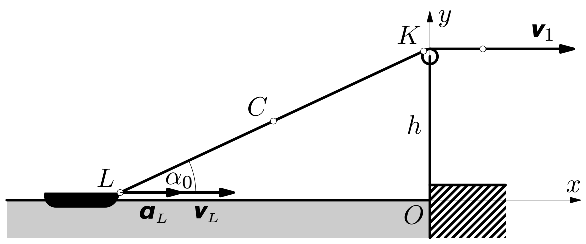
$$= \frac{-v_1^2|x| + \dfrac{v_1^2 l^2}{|x|}}{x^2} = \frac{v_1^2 h^2}{|x|^3}\,.$$

V popsané poloze (v čase $t = 0$) bude

$$v_L = \frac{v_1 l_0}{x_0} = \frac{v_1}{\cos\alpha_0} \qquad a_L = v_1^2 \frac{h^2}{h^3 \mathrm{cotg}^3\alpha_0} = \frac{v_1^2}{h}\,\mathrm{tg}^3\alpha_0\,.$$

Pro dané hodnoty vychází $v_L = 6{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $a_L = 1{,}48\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

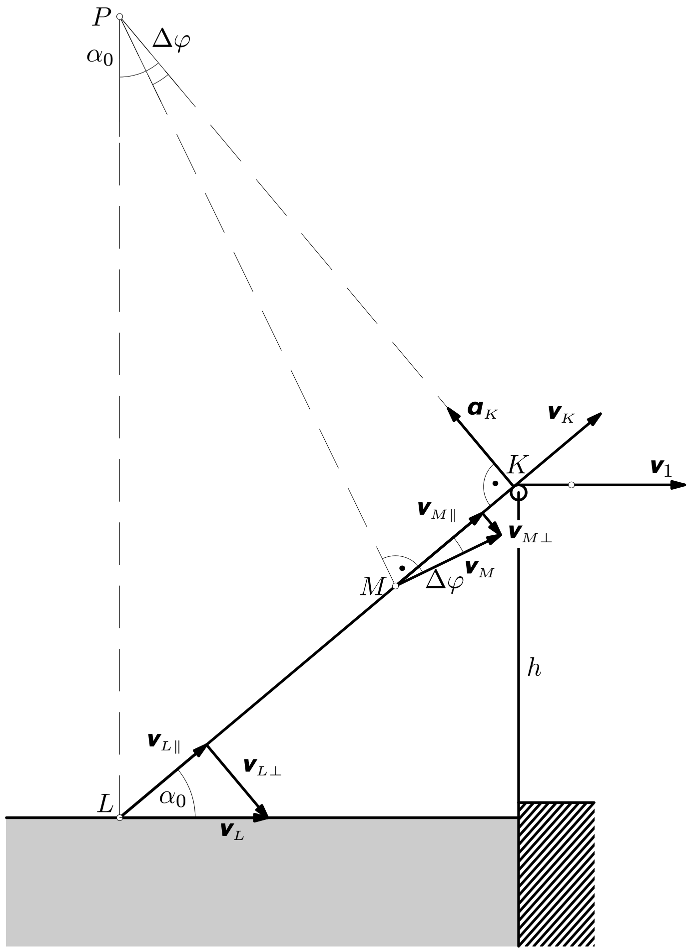
5 bodů



Obr. R1

b) Napnuté lano mezi body L a K se pohybuje jako tuhé těleso. V daném okamžiku se bod K nachází u kladky, jeho rychlost $\boldsymbol{v}_K$ má směr lana a velikost v_1. V krátkém časovém intervalu se lano otáčí okolo okamžitého pólu pohybu P, který určíme jako průsečík přímek vedených body L a K kolmo k vektorům $\boldsymbol{v}_L$ a $\boldsymbol{v}_K$ (obr. R2a). Úhlová rychlost lana je

$$\omega = \frac{v_K}{|PK|} = \frac{v_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 \cdot \sin\alpha_0}{h}\,.$$



Obr. R2a

Uvažujme bod M lana vzdálený od bodu K o $\Delta l = v_1 \Delta t$, přičemž $\Delta l \ll l$. Jeho okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}_M$, je kolmá k úsečce PM a svírá s lanem úhel $\Delta\varphi = \omega \Delta t$. Můžeme ji rozložit na složku $\boldsymbol{v}_{M\parallel}$ ve směru lana, která má konstantní velikost v_1 a na složku $\boldsymbol{v}_{M\perp}$ kolmou k lanu, která má velikost

$$v_{M\perp} = v_1 \Delta\varphi = v_1 \omega \Delta t\,.$$

Za krátkou dobu Δt dorazí bod M ke kladce. Vektor $\boldsymbol{v}_{M\parallel}$ se přitom pootočí o úhel $\Delta\varphi$, čemuž odpovídá změna $|\Delta \boldsymbol{v}_{M\parallel}|$ o velikosti

$$|\Delta \boldsymbol{v}_{M\parallel}| = v_1 \Delta\varphi = v_1 \omega \Delta t\,,$$

která směřuje do bodu P. Složka $\boldsymbol{v}_{M\perp}$ mezitím zanikne, čemuž odpovídá změna $\Delta \boldsymbol{v}_{M\perp} = -\boldsymbol{v}_{M\perp}$, která má rovněž velikost $v_1\omega\Delta t$ a rovněž směřuje do bodu P. Zrychlení bodu K je vzhledem k nepatrné vzdálenosti prakticky stejné jako zrychlení bodu M. Má velikost

$$a_K = \frac{|\Delta \boldsymbol{v}_{M\parallel}| + |\Delta \boldsymbol{v}_{M\perp}|}{\Delta t} = \frac{2v_1\omega\Delta t}{\Delta t} = 2v_1\omega = \frac{2v_1^2 \sin^2\alpha_0}{h\cos\alpha_0}\,.$$

a směřuje do bodu P. Je to tedy vektor

$$\boldsymbol{a}_K = \left(-\frac{2v_1^2\sin^3\alpha_0}{h\cos\alpha_0}, \frac{2v_1^2\sin^2\alpha_0}{h}\right)\,.$$

Označme $\boldsymbol{r}_L$, $\boldsymbol{r}_C$ a $\boldsymbol{r}_K$ polohové vektory přídě loďky, uzlu C a uzlu K. Pro tyto tři body lana platí až do uvažovaného okamžiku

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\boldsymbol{r}_L + \boldsymbol{r}_K}{2}\,.$$

Proto také (obr. R2b)

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_K}{\mathrm{d}t}}{2} = \frac{\boldsymbol{v}_L + \boldsymbol{v}_K}{2}\,,$$

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_L}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_K}{\mathrm{d}t^2}}{2} = \frac{\boldsymbol{a}_L + \boldsymbol{a}_K}{2}\,.$$

V uvažovaném okamžiku je $\boldsymbol{v}_K = (v_1\cos\alpha_0, v_1\sin\alpha_0)$. Pak

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{1}{2}\left(\frac{v_1}{\cos\alpha_0} + v_1\cos\alpha_0, v_1\sin\alpha_0\right) = \frac{1}{2}v_1\left(\frac{1+\cos^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}, \sin\alpha_0\right)\,.$$

Vektor $\boldsymbol{v}_C$ má velikost

$$v_C = \frac{v_1}{2}\sqrt{\frac{(1+\cos^2\alpha_0)^2}{\cos^2\alpha_0} + \sin^2\alpha_0} = \frac{v_1}{2\cos\alpha_0}\sqrt{1+3\cos^2\alpha_0}$$

a svírá se směrem pohybu lodi úhel

$$\gamma = \mathrm{arctg}\frac{\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{1+\cos^2\alpha_0}\,.$$

Pro dané hodnoty vychází $v_C = 5{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\gamma = 17°$.

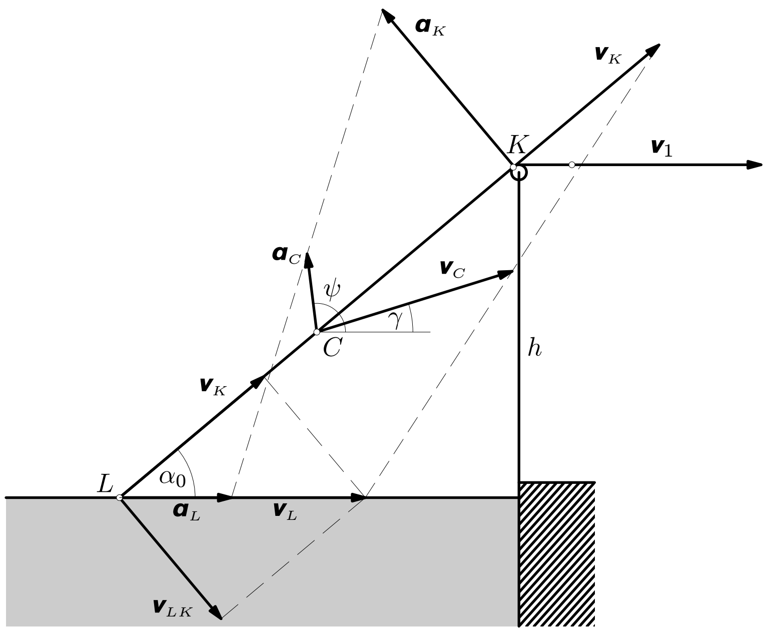
Zrychlení uzlu C

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{v_1^2}{2h}\left(\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos^3\alpha_0} - \frac{2\sin^3\alpha_0}{\cos\alpha_0}, 2\sin^2\alpha_0\right)$$

svírá se směrem pohybu lodi úhel

$$\psi = \mathrm{arctg}\frac{2\sin^2\alpha}{\dfrac{\sin^3\alpha_0}{\cos^3\alpha_0} - \dfrac{2\sin^3\alpha_0}{\cos\alpha_0}} + 180° = \mathrm{arctg}\frac{2\cos^3\alpha}{\sin\alpha(1-2\cos^2\alpha)} + 180°.$$

Pro dané hodnoty vychází $a_K = 2{,}70\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\boldsymbol{a}_C = (-0{,}128;\ 1{,}033)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_C = 1{,}04\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\psi = 97°$. **5 bodů**



Obr. R2b

3. a) Paprsek odchýlený od spojnice zdroje se středem koule o úhel φ dopadá na povrch koule pod úhlem α, který určíme užitím sinové věty (obr. R3):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{d}{R}\,.$$

Aby nastal úplný odraz, musí být překročen mezní úhel α_m. Tedy

$$\sin\alpha = \frac{d\sin\varphi}{R} \geq \sin\alpha_\mathrm{m} = \frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi \geq \frac{R}{nd}\,.$$

Nerovnice má řešení, jestliže

$$\frac{R}{nd} \leq 1 \quad\Rightarrow\quad d \geq \frac{R}{n}\,.$$

Od povrchu koule se bude úplně odrážet nenulová část světelného toku, jestliže

$$\frac{R}{n} < d < R\,, \quad \text{pro dané hodnoty} \quad 6{,}6\ \mathrm{cm} < d < 10\ \mathrm{cm}\,.$$

5 bodů

b) Abychom určili, jaká část světelného toku se úplně odrazí od povrchu skleněné koule, zvolíme pomocnou kulovou plochu o poloměru r se středem v místě zdroje tak, aby se celá nacházela uvnitř skla (obr. R4). Paprsky, u kterých dojde k úplnému odrazu, vymezí na ní kulový pás o výšce

$$v = 2r\cos\varphi_1\,, \quad \text{kde} \quad \varphi_1 = \arcsin\frac{R}{nd}\,.$$

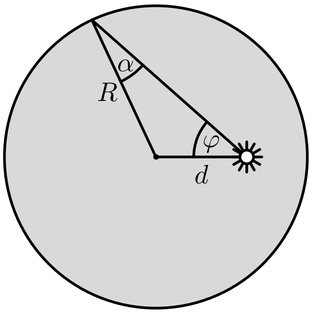
Má-li tímto kulovým pásem procházet polovina světelného toku, musí být jeho plošný obsah roven polovině povrchu celé koule. Z toho

$$2\pi r v = 4\pi r^2\cos\varphi_1 = 2\pi r^2 \quad \rightarrow \quad \cos\varphi_1 = \frac{1}{2}\,,$$

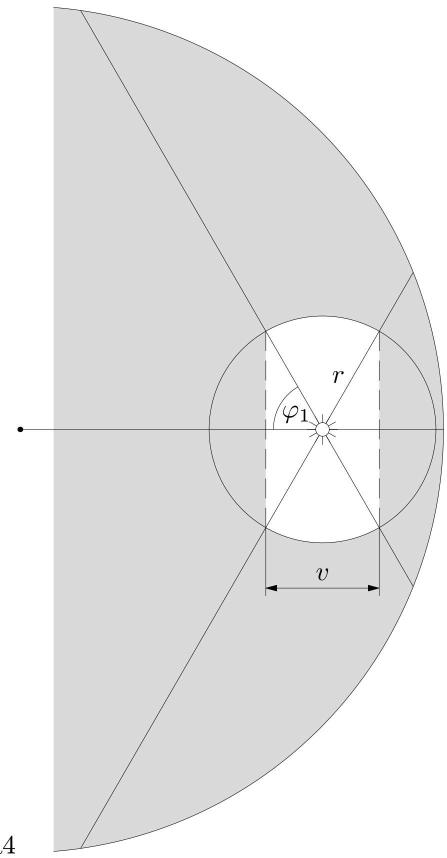
$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1-\cos^2\varphi_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{nd}\,,$$

$$d = \frac{2R}{n\sqrt{3}} = 7{,}6\ \text{cm}\,.$$

5 bodů



Obr. R3



Obr. R4

4. a) Z rovnic

$$U = I_1 X_C\,, \qquad U = I_2\sqrt{R^2 + X_L^2}$$

dostaneme:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_C} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 9X_C^2 = 4R^2 + 4X_L^2\,,$$

$$\frac{9}{\omega^2 C^2} = 4R^2 + 4\omega^2 L^2\,,$$

$$L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2 - \frac{9}{4} = 0\,.$$

Získali jsme kvadratickou rovnici pro ω^2. Úloze vyhovuje kořen

$$\omega^2 = \frac{-R^2C^2 + \sqrt{R^4C^4 + 9L^2C^2}}{2L^2C^2} = 7{,}017 \cdot 10^4\ \mathrm{rad}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\,.$$

Z toho $\omega = 264{,}9\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,,\quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 42\ \mathrm{Hz}\,,\quad U = \dfrac{I_1}{\omega C} = 113\ \mathrm{V}\,.$

5 bodů

b) Použijeme fázorový diagram na obr. R5. Fázor $\boldsymbol{U}$ celkového napětí předbíhá fázor $\boldsymbol{I}_2$ proudu ve větvi s cívkou a rezistorem o úhel

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{U_L}{U_R} = \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R} = 69{,}3^\circ\,.$$

Fázor $\boldsymbol{I}_1$ proudu ve větvi s kondenzátorem předbíhá fázor $\boldsymbol{U}$ o 90° a fázor $\boldsymbol{I}_2$ o $90^\circ + \alpha$.

Z kosinové a sinové věty dostaneme

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos(90^\circ - \alpha)} = 0{,}13\ \mathrm{A}\,,$$

$$\beta = 90^\circ - \varphi = \arcsin\frac{I_2\sin(90^\circ - \alpha)}{I} = 32^\circ\,, \qquad \varphi = 58^\circ\,.$$

5 bodů

Řešení úlohy b) symbolickou metodou:
Celková impedance obvodu připojeného ke zdroji je

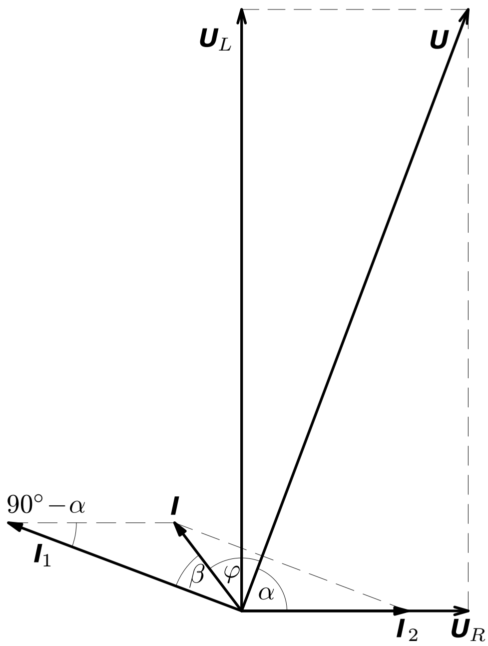
$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}} = \frac{\dfrac{R + \mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC}\,.$$

Fázové posunutí mezi napětím a proudem určíme jako rozdíl argumentů čitatele a jmenovatele. (Pozor! Komplexní číslo ve jmenovateli patří do druhého kvadrantu Gaussovy roviny.)

$$\varphi_U - \varphi_I = \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R} - \left(\mathrm{arctg}\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} + 180^\circ\right) =$$
$$= 69{,}3^\circ - 127{,}3^\circ = -58^\circ\,.$$

Napětí je fázově opožděno za proudem o 58°. Celkový proud má efektivní hodnotu

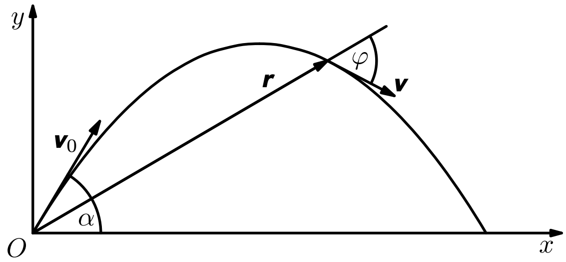
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 0{,}13\ \mathrm{A}\,.$$



Obr. R5

5. a) Zvolme soustavu souřadnic podle obr. R6. Dokud kámen stoupá, obě souřadnice polohového vektoru se zvětšují a vzdálenost od počátku roste. Podobná situace by nastala, kdyby pohyb pokračoval pod rovinou dopadu. Vzdálenost kamene od počátku se tedy může po nějakou dobu zmenšovat jen na sestupném úseku trajektorie, tedy mezi okamžikem dosažení vrcholu

$$t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{a okamžikem dopadu} \quad t_d = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$



Obr. R6

Pokud se kámen vzdaluje od počátku, je vektor okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ odchýlen od polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ o méně než 90° a skalární součin $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}$ je kladný. Přibližuje-li se, je odchylka větší než 90° a skalární součin $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}$ je záporný. Vzdálenost může dosáhnout lokálního extrému jen v bodech, kde $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Dosazením

$$\boldsymbol{r} = \left(v_0 t\cos\alpha, v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right), \quad \boldsymbol{v} = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha - gt)$$

dojdeme k rovnici

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{t}{2}(g^2t^2 - 3v_0 gt\sin\alpha + 2v_0^2) = 0\,. \tag{1}$$

Protože během letu je trvale $t > 0$, stačí řešit rovnici

$$g^2t^2 - 3v_0 gt\sin\alpha + 2v_0^2 = 0\,, \tag{2}$$

která má diskriminant $D = 9v_0^2g^2\sin^2\alpha - 8v_0^2g^2$.

Diskuse:

- Jestliže $\sin\alpha < \sqrt{\frac{8}{9}}$ tj. $\alpha < \arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} = 70°32'$, nemá rovnice (2) řešení, skalární součin $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}$ je trvale kladný a kámen se trvale vzdaluje od počátku trajektorie.
- Jestliže $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} = 70°32'$, má rovnice (2) jediné řešení

$$t = \frac{3v_0 g\sin\alpha}{2g^2} = \frac{3v_0\sin\alpha}{2g}\,.$$

V tomto okamžiku je sice skalární součin $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}$ nulový, jinak je však trvale kladný. Také v tomto případě se kámen trvale vzdaluje.

- Jestliže $90° > \alpha > \arcsin\sqrt{\dfrac{8}{9}} = 70°32'$, má rovnice (2) dvě řešení

$$t_1 = \frac{3v_0 g\sin\alpha - \sqrt{D}}{2g^2}\,, \qquad t_2 = \frac{3v_0 g\sin\alpha + \sqrt{D}}{2g^2}\,.$$

Z výše uvedených důvodů platí $t_\mathrm{v} < t_1 < t_2 < t_\mathrm{d}$. Výraz na levé straně rovnice (1) můžeme upravit na tvar

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{g^2 t}{2}(t-t_1)(t-t_2)\,.$$

Pro $0 < t < t_1$ je výraz kladný a kámen se vzdaluje od počátku,
pro $t_1 < t < t_2$ je záporný a kámen se přibližuje k počátku,
pro $t_2 < t < t_\mathrm{d}$ je opět kladný a kámen se vzdaluje od počátku.
V čase t_1 dosahuje vzdálenost lokálního maxima, v čase t_2 dosahuje lokálního minima.

5 bodů

b) Pro dané hodnoty $\alpha = 75°$, $v_0 = 40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ je trajektorie kamene zobrazena na obr. R7, kde jsou také vyznačeny jeho polohy po 0,1 s.
Rovnice (2) má dvě řešení: $t_1 = 4{,}623$ s, $t_2 = 7{,}193$ s.
Kámen se tedy vzdaluje od počátku trajektorie až do času t_1 (bod A), kdy $x_1 = 47{,}86$ m, $y_1 = 73{,}79$ m, $r_1 = 87{,}95$ m.
Pak se přibližuje až do času t_2 (bod B), kdy $x_2 = 74{,}46$ m, $y_2 = 24{,}15$ m, $r_2 = 78{,}28$ m.
Ve zbývajícím čase se opět vzdaluje, až v čase $t_\mathrm{d} = 7{,}88$ s dopadne ve vzdálenosti $x_\mathrm{d} = 81{,}55$ m.

5 bodů

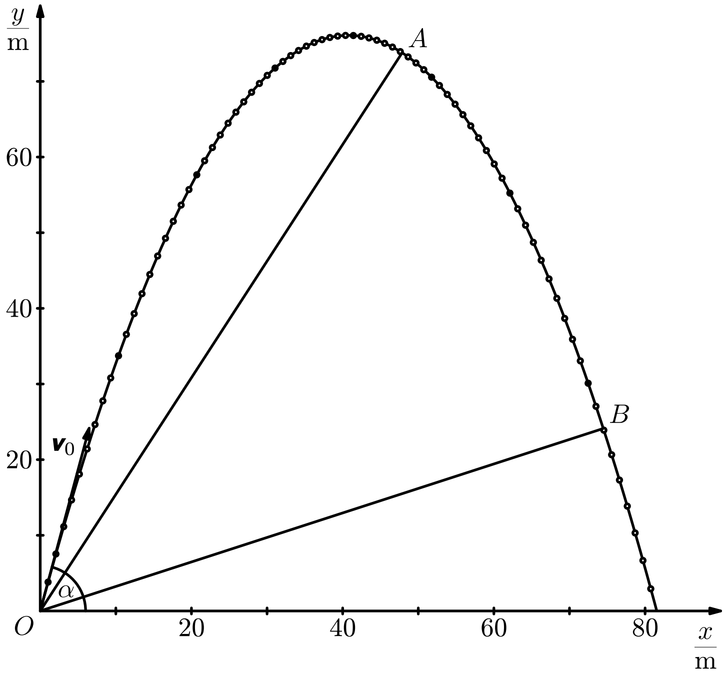
Řešení užitím diferenciálního počtu:
Pro vzdálenost r kamene od počátku trajektorie platí

$$r^2 = x^2 + y^2 = v_0^2 t^2 - v_0 g t^3 \sin\alpha + \frac{1}{4}g^2 t^4\,. \tag{3}$$

Jestliže $\dfrac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} > 0$, kámen se vzdaluje, jestliže $\dfrac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} < 0$, kámen se přibližuje.
Lokální minimum nebo maximum může nastat, když $\dfrac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} = 0$. Derivováním vztahu (3) dojdeme k rovnici

$$2v_0^2 t - 3v_0 g t^2 \sin\alpha + g^2 t^3 = 0\,. \tag{4}$$

Dál můžeme postupovat obdobně jako v předcházejícím řešení.



Obr. R7

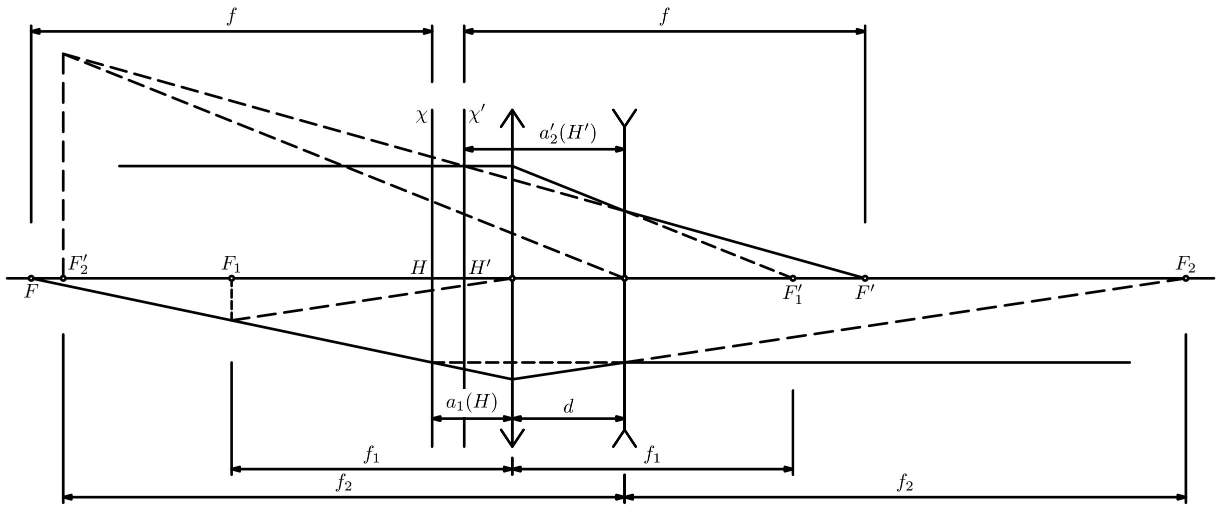
6. Pro hodnoty $f_1 = 10$ cm, $f_2 = -20$ cm, $d = 4$ cm dostaneme užitím vzorců z letošního studijního textu ZOBRAZENÍ ČOČKAMI:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = 14{,}29\ \mathrm{cm}\,,$$

$$a_1(H) = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2} = 2{,}86\ \mathrm{cm}\,,$$

$$a_2'(H') = \frac{f_2 d}{\Delta} = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2} = -5{,}71\ \mathrm{cm}\,.$$

Grafické řešení úlohy je na obr. R8.



Obr. R8

7. a) Reakci hoření popisuje rovnice

$$CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O\,.$$

Z ní je zřejmé, že na shoření jednoho molu metanu se spotřebují 2 moly kyslíku. Vznikne 1 mol oxidu uhličitého a 2 moly vodní páry.

3 body

Jestliže parciální tlaky metanu a kyslíku byly stejné, měly tedy hodnotu $p_0/2$, byla stejná i látková množství obou složek. Z rovnice reakce vyplývá, že shořela jen polovina látkového množství metanu. Zbývající polovina měla po ochlazení na původní teplotu parciální tlak $p_0/4$. Stejné látkové množství a parciální tlak $p_0/4$ měl i oxid uhličitý vzniklý při reakci. Vzniklá vodní pára, pokud by zůstala v plynném skupenství, by měla dvojnásobné látkové množství a parciální tlak $p_0/2 = 5{,}0 \cdot 10^4$ Pa, který je mnohem větší než tlak nasycených vodních par při teplotě t_0. Ten má hodnotu $p_\mathrm{s} = 4{,}24 \cdot 10^3$ Pa. Proto větší část vodní páry zkondenzovala na vodu, jejíž objem je zanedbatelný. Tlak plynu v reakční komoře se ustálil na hodnotě

$$p = \frac{p_0}{4} + \frac{p_0}{4} + p_\mathrm{s} = 5{,}4 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,.$$

3 body

b) Hmotnost spáleného metanu určíme ze stavové rovnice:

$$m = \frac{M_\mathrm{m}(CH_4) \cdot \frac{p_0}{4} \cdot V}{RT} = \frac{16{,}04 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \cdot 2{,}5 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} \cdot 5{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}}{8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \cdot 303\ \mathrm{K}} = 7{,}96 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg}\,.$$

Při ochlazování na původní teplotu bylo odvedeno teplo $Q = mH = 44$ kJ.

4 body