Řešení úloh regionálního kola 47. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Úbytek potenciální energie během celé jízdy je roven práci třecí síly při zastavování:

$$mg \cdot d \sin\alpha = fmg\cos\alpha \cdot x\,.$$

Z rovnice plyne $x = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{f} d = 41{,}9\ \mathrm{m}$.

3 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie na prvním úseku

$$mg\sin\alpha \cdot (d - x) = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

a z výsledku úlohy a) plyne $v_{\max} = \sqrt{2gd \dfrac{f - \operatorname{tg}\alpha}{f} \sin\alpha} = 6{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

3 body

c) Zrychlení vagonu na prvním úseku způsobuje složka tíhové síly ve směru nakloněné roviny:

$$a_1 = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha = 0{,}31\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Zrychlení vagonu na druhém úseku způsobuje výslednice třecí síly působící proti směru pohybu a složky tíhové síly ve směru pohybu:

$$a_2 = \frac{fmg\cos\alpha - mg\sin\alpha}{m} = g(f\cos\alpha - \sin\alpha) = 0{,}57\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

4 body

Úlohy a), b) je možné též řešit kinematicky s využitím výsledku úlohy c), řešení je však pracnější:

$$d - x = \frac{v_{\max}^2}{2a_1}\,, \qquad x = \frac{v_{\max}^2}{2a_2}\,, \qquad \frac{d-x}{x} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{f\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha}\,,$$

$$d\sin\alpha - x\sin\alpha = xf\cos\alpha - x\sin\alpha\,, \qquad x = \frac{d\operatorname{tg}\alpha}{f}\,,$$

$$v_{\max}^2 = 2a_2 x = 2gd\left(\sin\alpha - \frac{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{f}\right), \quad v_{\max} = \sqrt{2gd\left(\sin\alpha - \frac{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{f}\right)}\,.$$

2. a) Úlohu budeme řešit postupnými výpočty. Perioda oběhu družice je

$$T = \frac{24 \cdot 60 \cdot 60}{9}\ \mathrm{s} = 9\,600\ \mathrm{s}\,.$$

Z rovnosti mezi velikostmi dostředivé a gravitační síly

$$mr\frac{4\pi^2}{T^2} = \varkappa\frac{Mm}{r^2} \tag{1}$$

plyne

$$r = \sqrt[3]{\frac{\varkappa M T^2}{4\pi^2}} = 9\,765\ \mathrm{km}\,.$$

Výška družice nad zemským povrchem je $h = r - R = 3\,390\ \mathrm{km}$.
Velikost obvodové rychlosti je

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 6\,390\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \quad (\text{Obecně} \quad v = \sqrt[3]{\frac{2\pi\varkappa M}{T}}\,.)$$

5 bodů

b) Zmenšením velikosti obvodové rychlosti přejde družice na eliptickou trajektorii nacházející se uvnitř původní kružnice. Hlavní poloosa této elipsy je proto menší než poloměr kružnice a v důsledku 3. Keplerova zákona bude perioda též menší.

2 body

c) Podmínka minimální periody je podle 3. Keplerova zákona splněna pro minimální velikost hlavní poloosy, tedy pro minimální poloměr kružnice. Z rovnice (1) plyne

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h_0)^3}{\varkappa M}} = 5\,540\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 32\ \mathrm{min}\ 20\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

(*pozn.- všechny konečné výsledky jsou zaokrouhleny na 3 platné číslice.*)

3.a) Partner působící silou velikosti F po dobu Δt na partnerku jí udělí hybnost o velikosti $m_2 v_2 = F\Delta t$ a stejně velkou hybnost opačného směru $m_1 v_1 = F\Delta t$ získá on vlivem reakce. Velikost rychlosti partnera tak bude

$$v_1 = \frac{F\Delta t}{m_1}, \tag{1}$$

velikost rychlosti partnerky

$$v_2 = \frac{F\Delta t}{m_2}. \tag{2}$$

Vzájemná rychlost bruslařů je $v = v_1 + v_2$. Užitím rovnic (1) a (2) dostaneme $v = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F\Delta t = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **3 body**

b) Vykonaná práce je rovna získané kinetické energii obou bruslařů

$$W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 .$$

Opět užitím rovnic (1) a (2) dostaneme $W = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} F^2 (\Delta t)^2 = 60\ \mathrm{J}$.

Jiné řešení: Partnerka se během působení pohybuje s konstantním zrychlením o velikosti $a_2 = \frac{F}{m_2}$, rovnoměrně zrychleným pohybem tak urazí dráhu $s_2 = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m_2} (\Delta t)^2$. K uvedení partnerky do pohybu vykoná partner práci $W_2 = F s_2 = \frac{F^2}{2 m_2} (\Delta t)^2$. Analogicky ke svému uvedení do pohybu vykoná práci $W_1 = \frac{F^2}{2 m_1} (\Delta t)^2$. Celková práce je

$$W = W_1 + W_2 = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} F^2 (\Delta t)^2 .$$ **3 body**

c) Působení je podle 3. Newtonova pohybového zákona vzájemné, vždy působí na každého stejná síla po stejnou dobu a účinek těchto sil je stejný. Jediný rozdíl je v příčině, kdo sílu vyvolá. Výsledky úloh a), b) se nezmění.

2 body

d) Partner působící silou velikosti F po dobu Δt na partnerku jí udělí hybnost o velikosti $m_2 v_2 = F\Delta t$, přičemž sám zůstane na místě. Vzájemná rychlost je

$$v' = \frac{F\Delta t}{m_2} = v_2 = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Práce vykonaná partnerem je v tomto případě rovna kinetické energii partnerky:

$$W' = \frac{1}{2} m_2 v'^2 = \frac{F^2}{2 m_2} (\Delta t)^2 = 36\ \mathrm{J}.$$ **2 body**

4. a) Z grafu plyne
$$a_\mathrm{A} = \frac{2{,}4}{4}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 0{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,, \qquad a_\mathrm{B} = \frac{12 - 2{,}4}{4}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 2{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

2 body

b) Automobil A urazil během 30 s dráhu
$$s_\mathrm{A} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}6\cdot 30^2\ \mathrm{m} = 270\ \mathrm{m}\,.$$

Doba rozjíždění automobilu B je $\dfrac{v}{a_\mathrm{A}} = \dfrac{12}{2{,}4}\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{s}$, začínal se proto rozjíždět v čase 3 s. Jeho uražená dráha v čase 30 s byla
$$s_\mathrm{B} = \frac{1}{2}\cdot 2{,}4\cdot 5^2\ \mathrm{m} \;+\; 12\cdot(30-8)\ \mathrm{m} = 294\ \mathrm{m}\,.$$

Automobil B měl tedy v čase 30 s před automobilem A dráhový náskok 294 m − 270 m = 24 m. **2 body**

c) Maximální dráhový náskok automobilu B před automobilem A je v čase, kdy dosáhnou podruhé stejné okamžité rychlosti:
$$t = \frac{v}{a_\mathrm{A}} = \frac{12}{0{,}6}\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{s}\,.$$

V tomto čase je dráha uražená automobilem A
$$s_\mathrm{A} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}6\cdot 20^2\ \mathrm{m} = 120\ \mathrm{m}\,.$$

Dráha uražená automobilem B je
$$s_\mathrm{B} = \frac{1}{2}\cdot 2{,}4\cdot 5^2\ \mathrm{m}\ + 12\cdot(20-8)\ \mathrm{m}\ =\ 174\ \mathrm{m}$$

Jejich rozdíl je 54 m. **2 body**

d) Z grafu plyne, že k prvnímu předjetí musí dojít na časovém intervalu 4 s až 8 s. Rovnici s dosazenými číselnými hodnotami
$$\frac{1}{2}\cdot 0{,}6\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}4\cdot (t-3)^2$$

upravíme na tvar $t^2 - 8t + 12 = 0$. Z jejích kořenů 2 a 6 má fyzikální význam kořen $t = 6$ s.

K dalšímu předjetí dojde po čase 20 s, od něhož se začne automobil A opět přibližovat k automobilu B. Rovnici
$$\frac{1}{2}\cdot 0{,}6\cdot t^2 = 30 + 12\cdot(t-8)$$

s dosazenými číselnými hodnotami upravíme na tvar $t^2 - 40t + 220 = 0$. Z jejích kořenů $20 \pm 6\sqrt{5}$ má fyzikální význam kořen
$$t = (20 + 6\sqrt{5})\ \mathrm{s}\ =\ 33{,}4\ \mathrm{s}\,.$$

4 body