Řešení úloh regionálního kola 47. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autor úloh: P. Šedivý

1. a) Z grafu přímo určíme $y_\mathrm{m} = 22\ \mathrm{cm} = 0{,}25\ \mathrm{m}$, $T = 1{,}60\ \mathrm{s}$. Úhlová frekvence kmitání je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3{,}93\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}\,.$$

1,5 bodu

Závaží prolétlo rovnovážnou polohou vzhůru v čase $t = 1{,}3\ \mathrm{s} = T - \tau$, kde $\tau = 0{,}3\ \mathrm{s}$. Tomu odpovídá fázové posunutí

$$\varphi_0 = \frac{\tau}{T}2\pi = \frac{3}{8}\pi\,.$$

1,5 bodu

b) Amplitudy rychlosti a zrychlení jsou

$$v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = \frac{2\pi y_\mathrm{m}}{T} = 0{,}982\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,, \quad a_\mathrm{m} = \omega^2 y_\mathrm{m} = \frac{4\pi^2 y_\mathrm{m}}{T^2} = 3{,}86\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

c) Pružina má tuhost $k = m\omega^2 = \dfrac{4m\pi^2}{T^2} = 9{,}25\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

1 bod

d) V dolní krajní poloze působí pružina na závaží silou o velikosti

$$F_1 = m(g + a_\mathrm{m}) = m\left(g + \frac{4\pi^2 y_\mathrm{m}}{T^2}\right) = 8{,}20\ \mathrm{N}\,.$$

V horní krajní poloze působí pružina na závaží silou o velikosti

$$F_2 = m(g - a_\mathrm{m}) = m\left(g - \frac{4\pi^2 y_\mathrm{m}}{T^2}\right) = 3{,}57\ \mathrm{N}\,.$$

Velikosti obou sil jsou v poměru

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{g + a_\mathrm{m}}{g - a_\mathrm{m}} = 2{,}3\,.$$

2 body

e) Energie kmitání je

$$E_\mathrm{km} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y_\mathrm{m}^2 = \frac{2m\pi^2 y_\mathrm{m}^2}{T^2} = 0{,}245\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

2. a) Látkové množství plynu určíme užitím stavové rovnice

$$\frac{pV}{T} = nR \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 0{,}040\ \mathrm{mol}\,.$$

1 bod

b) Celková práce W' vykonaná plynem při jednom cyklu je vyjádřena obsahem plochy ohraničené $p - V$ diagramem kruhového děje.

$$W'_{ABCD} = p_1 V_1 = 100\ \mathrm{J}\,, \qquad W'_{AEFD} = 3p_1 V_1 = 300\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

c) Účinnost kruhového děje je rovna poměru celkové práce W' vykonané plynem při jednom cyklu a přijatého tepla Q_1. V prvním cyklu plyn přijímá teplo při izochorickém ohřátí $A \to B$ a při izobarické expanzi $B \to C$. Ve stavu zobrazeném bodem C má plyn teplotu $4T_1$. Jeho vnitřní energie se tedy zvětšila o

$$\Delta U_{AC} = 2{,}5 nR\Delta T = 7{,}5 nRT_1 = 7{,}5 p_1 V_1\,.$$

Při expanzi $B \to C$ plyn navíc vykonal práci $W'_{BC} = 2p_1 V_1$.

Přijaté teplo je tedy $Q_{1AC} = \Delta U_{AC} + W'_{BC} = 9{,}5 p_1 V_1$

a účinnost děje $\eta_{ABCD} = \dfrac{W'_{ABCD}}{Q_{1AC}} = \dfrac{p_1 V_1}{9{,}5 p_1 V_1} = 10{,}5\ \%$.

3 body

Ve stavu zobrazeném bodem F má plyn teplotu $8T_1$. Při druhém cyklu je tedy

$$\Delta U_{AF} = 2{,}5 nR\Delta T = 17{,}5 nRT_1 = 17{,}5 p_1 V_1\,.$$

Při expanzi $E \to F$ plyn navíc vykonal práci $W'_{BC} = 4p_1 V_1$.

Přijaté teplo je tedy $Q_{1AF} = \Delta U_{AF} + W'_{EF} = 21{,}5 p_1 V_1$

a účinnost děje $\eta_{AEFD} = \dfrac{W'_{AEFD}}{Q_{1AF}} = \dfrac{3p_1 V_1}{21{,}5 p_1 V_1} = 14{,}0\ \%$.

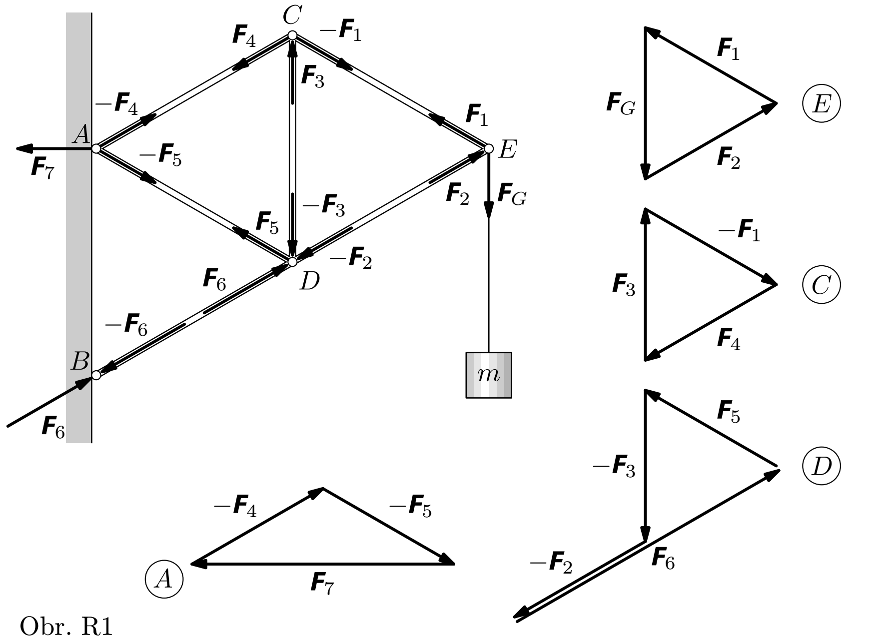
3 body

Účinnosti obou kruhových dějů jsou v poměru

$$\frac{\eta_{AEFD}}{\eta_{ABCD}} = \frac{3}{21{,}5} : \frac{1}{9{,}5} = \frac{28{,}5}{21{,}5} = 1{,}33\,.$$

1 bod

3. a) Síly působící na jednotlivé šrouby jsou v rovnováze. Jejich grafickým složením postupně dostaneme uzavřené obrazce, ze kterých odvodíme vztahy potřebné pro výpočty (obr. R1).



Obr. R1

Síly působící bodech E a C tvoří rovnostranné trojúhelníky. Platí tedy

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_G \,.$$

Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_4$ jsou tahové, síly $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ jsou tlakové. **3 body**

Síly působící bodě D tvoří obrazec, jehož částí je opět rovnostranný trojúhelník. Platí

$$F_5 = F_G \,, \qquad F_6 = 2F_G \,.$$

Síla $\boldsymbol{F}_5$ je tahová, síla $\boldsymbol{F}_6$ je tlaková. **3 body**

Síly působící bodě A tvoří rovnoramenný trojúhelník, který má při základně úhly 30°. Síla $\boldsymbol{F}_7$ je tahová a má velikost

$$F_7 = 2 \cdot F_G \cos 30^\circ = F_G\sqrt{3} \,.$$ **2 body**

V bodě B působí na šroub jen 2 síly, které musí mít podle principu akce a reakce stejnou velikost a opačný směr. Je to síla $-\boldsymbol{F}_6$ od tyče a síla $\boldsymbol{F}_6$ od stěny. Obě síly jsou tlakové. **1 bod**

b) Z výsledků úlohy a) je zřejmé, že tyče AC, CE a AD jsou namáhány tahem a tyče BD a DE jsou namáhány tlakem. **1 bod**

4. a) Označme normálové a třecí síly, kterými na válec působí podlaha a stěna podle obr. R2. Platí

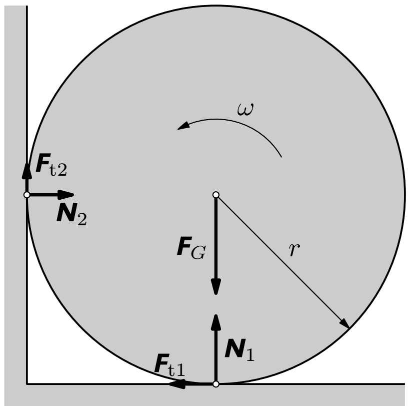
$$F_{t1} = fN_1\,, \qquad F_{t2} = fN_2\,. \qquad (1)$$

Protože těžiště válce je v klidu, platí také

$$N_1 + F_{t2} = mg\,, \qquad N_2 = F_{t1}\,. \quad (2)$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$N_2 = fN_1\,, \qquad N_1 + fN_2 = mg\,.$$



Obr. R2

$$N_1 = \frac{mg}{1+f^2}\,, \qquad F_{t_1} = N_2 = \frac{fmg}{1+f^2}\,, \qquad F_{t2} = \frac{f^2mg}{1+f^2}\,.$$

Pro dané hodnoty

$$N_1 = 222\ \mathrm{N}\,, \qquad N_2 = F_{t1} = 55\ \mathrm{N}\,, \qquad F_{t2} = 14\ \mathrm{N}\,.$$

5 bodů

b) Kinetická energie roztočeného válce je rovna práci, kterou spotřebují během zastavování třecí síly. Jestliže přitom válec vykoná n otáček, platí

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}mr^2\omega^2 = (F_{t1} + F_{t_2}) \cdot n \cdot 2\pi r = \frac{2\pi rnmgf(1+f)}{1+f^2}\,,$$

$$n = \frac{\omega^2(1+f^2)r}{8\pi fg(1+f)} = 11{,}6\,.$$

5 bodů