

Řešení úloh regionálního kola 46. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3, 4)

1. a) V neinerciální vztažné soustavě spojené s osou kyvadla a kuličkou je celková síla napínající vlákno výslednicí tíhové síly a setrvačné odstředivé síly (obr. R1).

Z obrázku plyne

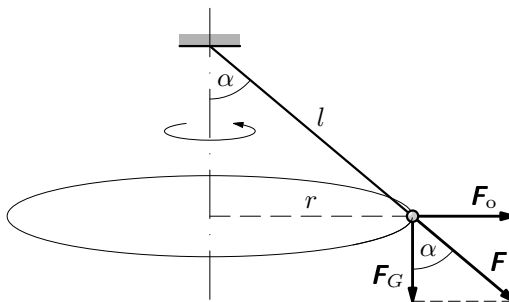
$$\cos \alpha = \frac{F_G}{F} = \frac{mg}{F}.$$

Dosazením podmínky

$$F_m = 2F_G = 2mg$$

dostaneme

$$\cos \alpha_m = \frac{1}{2}, \quad \text{tedy} \quad \alpha_m = 60^\circ.$$



Obr. R1

3 body

Pro odstředivou sílu platí

$$F_o = F_G \tan \alpha = mg \tan \alpha = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{l \sin \alpha}.$$

Z toho $v^2 = lg \tan \alpha \sin \alpha$.

V mezním případě, kdy $\alpha = \alpha_m = 60^\circ$, dostaneme

$$v_m^2 = lg \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3lg}{2}, \quad v_m = \sqrt{\frac{3lg}{2}} = 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- b) Pro odstředivou sílu rovněž platí

$$F_o = F_G \tan \alpha = mg \tan \alpha = m \frac{4\pi^2}{T^2} r = m \frac{4\pi^2}{T^2} l \sin \alpha.$$

$$\text{Z toho } T^2 = \frac{4\pi^2 l \cos \alpha}{g}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

Z podmínky $60^\circ \geq \alpha > 0$, neboli $0,5 \leq \cos \alpha < 1$ dostaneme

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \leq T < 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{číselně } 1,55 \text{ s} \leq T < 2,20 \text{ s}.$$

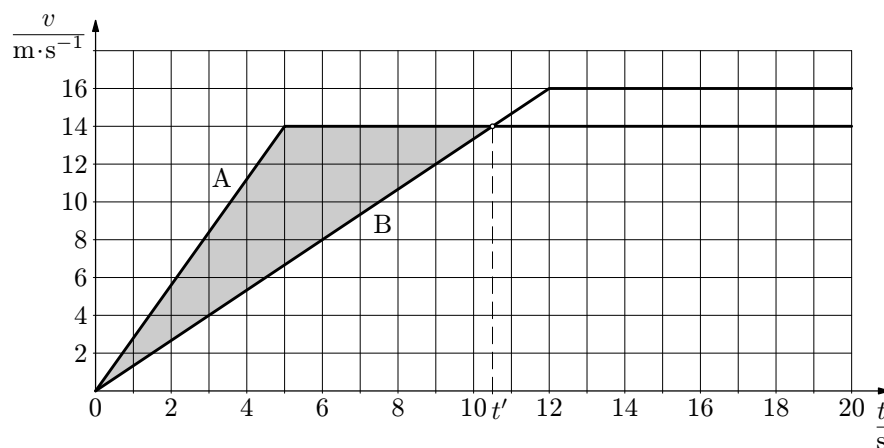
4 body

2. a) K sestrojení grafu pro vozidlo A je nutno určit velikost v_1 konečné rychlosti a odpovídající čas t_1 rovnoměrně zrychleného pohybu. Z rovnic

$$v_1 = a_1 t_1, \quad s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad \text{plyne} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}}, \quad v_1 = \sqrt{2a_1 s_1}.$$

Číselně vychází $t_1 = 5,0 \text{ s}$, $v_1 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 body



2 body

- b) Vzdálenost mezi vozidly je maximální v čase t' , kdy se velikosti rychlostí vyrovnají. Z grafu vyčteme nebo z rovnic $v_1 = a_2 t'$, $a_2 = v_2/t_2$ vypočítáme

$$t' = \frac{v_1 t_2}{v_2} = 10,5 \text{ s}.$$

Hledanou maximální vzdálenost vypočítáme jako obsah trojúhelníka vyznačeného v grafu: $d_{\max} = \frac{(t' - t_1)v_1}{2}$ nebo ze vztahu $d_{\max} = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_1(t' - t_1) - \frac{1}{2} a_2 t'^2$.

Po dosazení vychází $d_{\max} = 38,5 \text{ m}$.

3 body

- c) Velikost vzájemné rychlosti obou vozidel je rovna absolutní hodnotě rozdílu velikostí jejich rychlostí. Ta je největší v čase $t_1 = 5 \text{ s}$, kdy má hodnotu

$$\Delta v = v_1 - a_2 t_1 = v_1 - \frac{v_2}{t_2} t_1 = 7 \frac{1}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 7,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \textbf{1 bod}$$

- d) Během rozjíždění urazí vozidlo B dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \frac{1}{2} v_2 t_2 = 96 \text{ m}.$$

Řešením rovnice $s_1 + v_1(t_3 - t_1) = s_2 + v_2(t_3 - t_2)$ dostaneme

$$t_3 = \frac{s_1 - s_2 + v_2 t_2 - v_1 t_1}{v_2 - v_1} = 30,5 \text{ s}.$$

2 body

Poznámka: Nikde se nepožaduje obecné řešení.

3. a) Označme v_1 velikost rychlosti první loďky vzhledem k vodě. Ze zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 = m_2 v_2$ plyne

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2. \quad (1)$$

Jelikož se loďky pohybují od sebe, je velikost vzájemné rychlosti rovna součtu velikostí jejich rychlostí vzhledem k vodě

$$v = v_1 + v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Podle 2. pohybového zákona platí

$$F = \frac{m_2 v_2}{\Delta t} = 96 \text{ N}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- c) V soustavě spojené s první loďkou se druhá loďka vzdaluje rovnoměrně zrychleným pohybem a za dobu Δt dosáhne konečné rychlosti o velikosti v . Změna vzdálenosti je

$$\Delta d = \frac{1}{2} v \Delta t = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v_2 \Delta t = 1,1 \text{ m}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- d) Chlapec vykonal práci, která je rovna součtu kinetických energií obou loďek:

$$W = E_{k1} + E_{k2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Užitím vzorce (1) dostaneme

$$W \frac{m_2(m_1 + m_2)}{2m_1} v_2^2 = 108 \text{ J}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- e) Platí

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2 \right)^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

4. a) Ve směru pohybu soustavy působí pohybové složky tíhových sil, proti pohybu působí smykové tření kvádru. Zrychlení soustavy má tedy velikost

$$a = \frac{2mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha}{2m} = g \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} f \cos \alpha \right) > 0.$$

Výraz je kladný, jestliže

$$f < \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Pro dané hodnoty: $2 \operatorname{tg} \alpha = 0,69 > 0,60 = f$. Podmínka je splněna. **3 body**

- b) Z rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb $v = at$, $d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}$ odvodíme

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} f \cos \alpha \right)}}, \quad v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2gd \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} f \cos \alpha \right)}.$$

Číselně vychází $t = 4,1 \text{ s}$, $v = 1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3 body

- c) Na vozík působí ve směru pohybu pohybová složka tíhové síly a proti směru pohybu síla vlákna o velikosti F . Z druhého pohybového zákona plyne

$$ma = mg \sin \alpha - F,$$

$$F = mg \sin \alpha - ma = mg \sin \alpha - mg \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} f \cos \alpha \right) = \frac{1}{2} f mg \cos \alpha = 4,2 \text{ N}.$$

3 body

- d) Pokud by se soustava nerozjela, byla by pohybová složka tíhové síly vozíku v rovnováze se silou vlákna. Pak

$$F = mg \sin \alpha = 4,8 \text{ N}.$$

1 bod