

Řešení úloh 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Autoři úloh: J. Jírů (1), B. Vybíral (2), P. Šedivý (3, 5, 7), M. Medo (4) a I. Čáp (6)

Konečná úprava: P. Šedivý

1.a) Z kinematických zákonů vrhu

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = h_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

dostaneme vyloučením počáteční rychlosti v_0 rovnici $y = h_0 + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g t^2$.

Dosadíme souřadnice místa dopadu koule $x = d$, $y = 0$ pro čas $t = t_1$ a tento hledaný čas t_1 vyjádříme:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h_0 + d \operatorname{tg} \alpha)}{g}} = 1,99 \text{ s}.$$

3 body

- b) Z časových rovnic vrhu (1), (2) dostaneme vyloučením času t rovnici trajektorie. Dosadíme souřadnice místa dopadu koule $x = d$, $y = 0$ a vyjádříme hledanou počáteční rychlost

$$v_0 = \frac{d}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h_0 + d \operatorname{tg} \alpha)}}. \quad (3)$$

Číselně $v_0 = 13,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3 body

- c) Svislá složka rychlosti koule je $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$. Označme t_2 čas, v němž dosáhne koule maximální výšky, tehdy platí $v_y = 0$. Z toho $t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. V rovnici (2) položíme $y = h_{\max}$, $t = t_2$ a dostaneme hledanou maximální výšku

$$h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Po dosazení z rovnice (3) nakonec dostaneme

$$h_{\max} = h_0 + \frac{d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4(h_0 + d \operatorname{tg} \alpha)} = 5,98 \text{ m}.$$

4 body

2.a) Pro tíhu tělesa na vzduchu a ponořeného do vody platí

$$G_1 = mg = \varrho_b V g, \quad G_2 = G_1 - F_{vz} = (\varrho_b - \varrho_v) V g,$$

kde m je hmotnost tělesa a V jeho objem. Vydělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{\varrho_b - \varrho_v}{\varrho_b} = \frac{G_2}{G_1} \Rightarrow \varrho_b = \varrho_v \frac{G_1}{G_1 - G_2} = 8,63 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

4 body

b) Označíme-li m_1 hmotnost mědi a m_2 hmotnost cínu v tělese, platí

$$m = m_1 + m_2 \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} = 1.$$

Pro objem tělesa platí

$$V = \frac{m}{\varrho_b} = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} = m \left(\frac{\delta_1}{\varrho_1} + \frac{\delta_2}{\varrho_2} \right),$$

neboli

$$\frac{V}{m} = \frac{1}{\varrho_b} = \frac{\delta_1}{\varrho_1} + \frac{\delta_2}{\varrho_2} = \frac{\delta_1}{\varrho_1} + \frac{1 - \delta_1}{\varrho_2},$$

$$\delta_1(\varrho_1 - \varrho_2)\varrho_b = \varrho_1(\varrho_b - \varrho_2).$$

Hmotnostní podíl mědi pak je

$$\delta_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_b} \right) = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \left[1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_v} \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \right] = 0,847.$$

Hmotnostní podíl cínu je

$$\delta_2 = 1 - \delta_1 = 0,153.$$

6 bodů

3. Na těleso působí tíhová síla $\mathbf{F}_G$ a síla vlákna $\mathbf{F}_v$. Jejich výslednice $\mathbf{F}$ uděluje tělesu zrychlení $\mathbf{a}$. Všechny tři vyšetřované polohy tělesa jsou znázorněny na obr. R1.

- a) V krajní poloze je rychlost tělesa nulová. Tahová složka $\mathbf{F}_2$ tíhové síly se ruší se silou vlákna $\mathbf{F}_v$. Výslednice $\mathbf{F}$ je totožná s tečnou složkou $\mathbf{F}_1$ tíhové síly. Platí

$$F = F_1 = mg \sin \alpha_m = 0,85 \text{ N}, \quad F_v = mg \cos \alpha_m = 0,49 \text{ N},$$

$$a = \frac{F}{m} = g \sin \alpha = 8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

- b) Velikost v_m rychlosti tělesa při průchodu rovnovážnou polohou určíme ze zákona zachování energie:

$$mgh_m = \frac{1}{2}mv_m^2 \Rightarrow v_m = \sqrt{2gh_m} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_m)} = 2,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výslednice $\mathbf{F}$ síly vlákna a síly tíhové působí ve směru závěsu, tj. kolmo ke směru okamžité rychlosti, a uděluje tělesu pouze normálové (dostředivé) zrychlení o velikosti

$$a_n = \frac{v_m^2}{l} = 2g(1 - \cos \alpha_m) = g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Platí tedy $F = F_v - F_G = F_d = \frac{mv_m^2}{l} = mg = 0,981 \text{ N},$

$$F_v = F + F_G = 2F_G = 1,962 \text{ N}.$$

3 body

- c) Velikost v rychlosti v okamžiku, kdy je vlákno odchýleno o úhel α , určíme opět ze zákona zachování energie:

$$mgh_m - mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$v = \sqrt{2g(h_m - h)} = \sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_m)} = 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výslednice síly vlákna $\mathbf{F}_v$ a tahové složky $\mathbf{F}_2$ tíhové síly působí ve směru vlákna jako dostředivá síla $\mathbf{F}_d$ a uděluje tělesu normálové zrychlení $\mathbf{a}_n$. Platí

$$a_n = \frac{v^2}{l} = 2g(\cos \alpha - \cos \alpha_m) = 7,18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$F_v = F_2 + F_d = mg \cos \alpha + 2mg(\cos \alpha - \cos \alpha_m) = 1,60mg = 1,57 \text{ N}.$$

Pohybová složka $\mathbf{F}_1$ tíhové síly uděluje tělesu tečné zrychlení $\mathbf{a}_t$ o velikosti

$$a_t = \frac{F_1}{m} = g \sin \alpha = 4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Výsledná síla $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_d$ má velikost

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_d^2} = mg \sqrt{\sin^2 \alpha + 4(\cos \alpha - \cos \alpha_m)^2} = 0,887mg = 0,870 \text{ N},$$

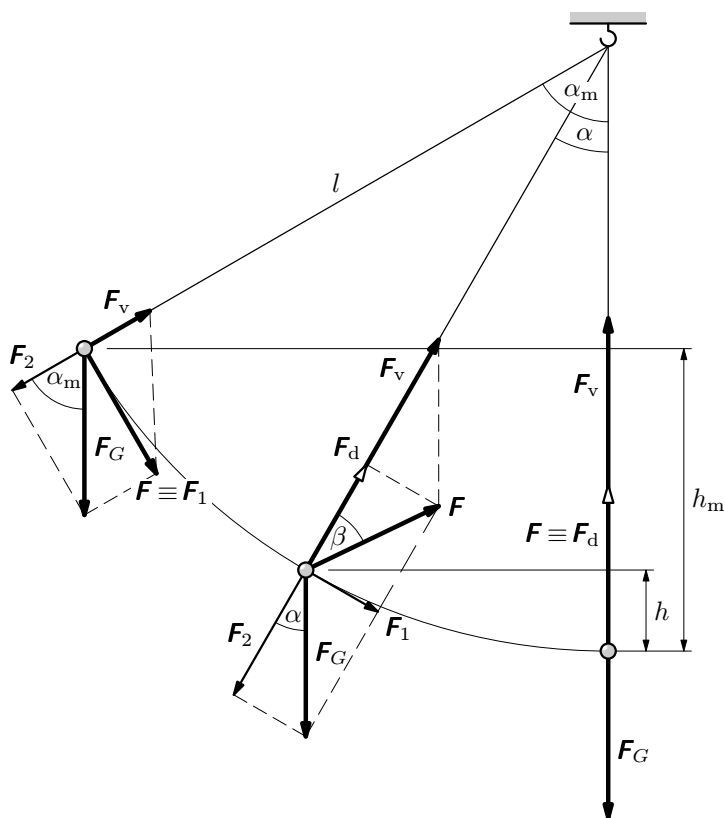
svírá s vláknem úhel β , pro který platí:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_1}{F_d} = \frac{\sin \alpha}{2(\cos \alpha - \cos \alpha_m)}, \quad \beta = 34^\circ,$$

a uděluje tělesu celkové zrychlení téhož směru o velikosti

$$a = \frac{F}{m} = g \sqrt{\sin^2 \alpha + 4(\cos \alpha - \cos \alpha_m)^2} = 0,887g = 8,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

5 bodů

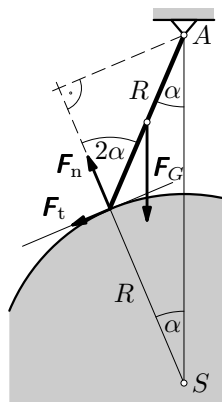


Obr. R1

- 4.a) Vyjdeme z obr. R2. Označme $\mathbf{F}_t$ tečnou složku a $\mathbf{F}_n$ normálovou složku síly, kterou kotouč působí na tyč. Platí $F_t = f F_n$. Síly působící na tyč musí splňovat momentovou větu vzhledem k ose v bodě A:

$$\begin{aligned} mg \frac{R}{2} \sin \alpha &= F_n R \sin 2\alpha + F_t R \cos 2\alpha = \\ &= \frac{F_t}{f} R \sin 2\alpha + F_t R \cos 2\alpha, \\ F_t &= \frac{mgf \sin \alpha}{2(\sin 2\alpha + f \cos 2\alpha)}. \end{aligned}$$

2 body



Obr. R2

Úhlové zrychlení kotouče během brzdění je namířeno proti okamžité úhlové rychlosti a má velikost

$$\varepsilon = \frac{F_t R}{J} = \frac{F_t R}{\frac{1}{2} M R^2} = \frac{mgf \sin \alpha}{M R (\sin 2\alpha + f \cos 2\alpha)}.$$

$$\text{Brzdná doba } t_b = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0 M R (\sin 2\alpha + f \cos 2\alpha)}{mgf \sin \alpha},$$

$$\text{brzdná úhlová dráha } \varphi_b = \frac{\omega_0 t_b}{2} = \frac{\omega_0^2 M R (\sin 2\alpha + f \cos 2\alpha)}{2mgf \sin \alpha},$$

$$\text{počet otáček do zastavení } N_b = \frac{\varphi_b}{2\pi} = \frac{\omega_0^2 M R (\sin 2\alpha + f \cos 2\alpha)}{4\pi mgf \sin \alpha}.$$

4 body

- b) Otáčí-li se kotouč opačným směrem, změní se orientace síly $\mathbf{F}_t$ na opačnou. Ve všech vzorcích části a) se změní znaménko (+) na (-). Z toho vyplývá, že brzdění bude účinnější.

2 body

V tomto případě však existuje omezení. Pro $\tan 2\alpha \leq f$ úloha nemá řešení. V případě rovnosti naroste síla tření do nekonečna, tyčka se zadře a zřejmě se něco zlomí.

2 body

5.a) Z rovnosti gravitační a dostředivé síly

$$\frac{\kappa M m}{(R+h)^2} = \frac{m v_1^2}{R+h} = m \frac{4\pi^2}{T_1^2} (R+h)$$

odvodíme: $v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}} = 7\,746 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{\kappa M}} = 5410 \text{ s} = 90 \text{ min } 10 \text{ s}.$$

2 body

b) Podle 3. Keplerova zákona $\frac{a^3}{(R+h)^3} = \frac{T^2}{T_1^2}$. Z toho

$$a = (R+h) \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\kappa M T^2}{4\pi^2}} = 26,65 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Trajektorie spojovací družice má excentricitu $e = a - (R+h) = 19,98 \cdot 10^6 \text{ m}$

a vedlejší poloosu $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 17,6 \cdot 10^6 \text{ m}.$

2 body

c) Plošnou rychlost spojovací družice dostaneme vydělením obsahu elipsy omezené trajektorií dobou oběhu

$$w = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} = 3,42 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Platí $w = \frac{v_p(a-e)}{2} = \frac{v_a(a+e)}{2}$. Z toho

$$v_p = \frac{2w}{a-e} = 10,2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_a = \frac{2w}{a+e} = 1463 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Jiné řešení: Z 2. Keplerova zákona a zákona zachování energie dostaneme soustavu rovnic

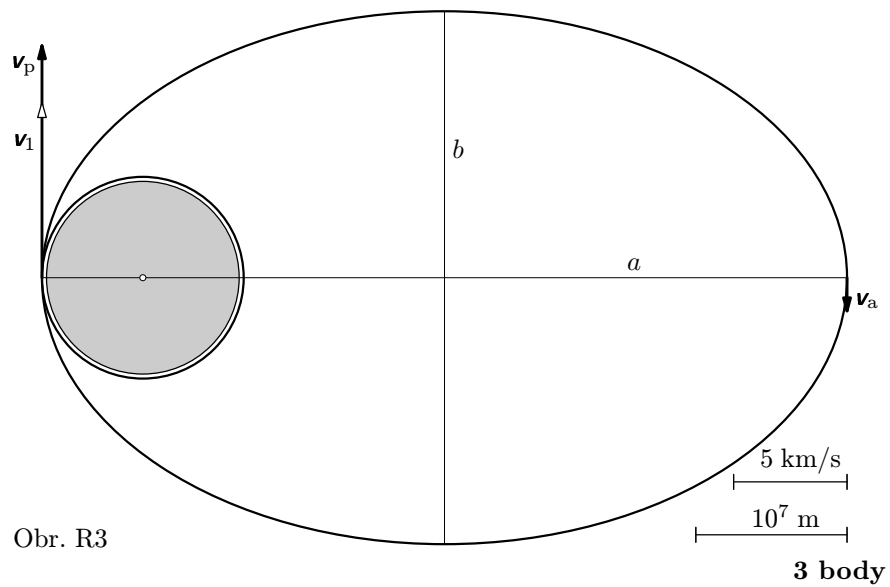
$$v_a(a+e) = v_p(a-e), \quad \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{\kappa M m}{a-e} = \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{\kappa M m}{a+e}.$$

Z toho

$$v_p = \sqrt{\frac{\kappa M}{a} \cdot \frac{a+e}{a-e}}, \quad v_a = \sqrt{\frac{\kappa M}{a} \cdot \frac{a-e}{a+e}}.$$

3 body

d)

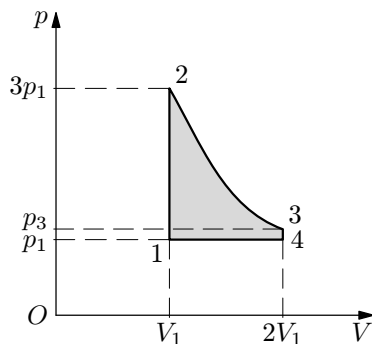


7.a) Látkové množství plynu určíme pomocí stavové rovnice:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 0,040 \text{ mol}.$$

1 bod

b,c)



Obr. R4

$$\begin{aligned} p_2 &= 3p_1 = 3,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \\ V_2 &= V_1 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \\ T_2 &= \frac{p_2}{p_1} T_1 = 3T_1 = 900 \text{ K}, \\ p_3 &= p_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma} = 3p_1 \cdot 0,5^{1,4} = \\ &= 1,137 p_1 = 1,137 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \\ V_3 &= V_4 = 2V_1 = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \\ T_3 &= T_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = 3T_1 \cdot 0,5^{0,4} = \\ &= 2,274 T_1 = 682 \text{ K}, \\ p_4 &= p_1 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \\ T_4 &= \frac{V_4}{V_1} T_1 = 2T_1 = 600 \text{ K}. \end{aligned}$$

3 body

d) Plyn přijal teplo při izochorickém ohřátí $1 \rightarrow 2$:

$$Q_{12} = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR \cdot 2T_1 = 5nRT_1 = 5p_1 V_1 = 500 \text{ J}.$$

Plyn odevzdal teplo při izochorickém ochlazení $3 \rightarrow 4$ a při izobarickém ochlazení $4 \rightarrow 1$:

$$Q'_{34} = nC_V(T_3 - T_4) = \frac{5}{2}nR \cdot 0,274T_1 = 0,684p_1 V_1 = 68,4 \text{ J},$$

$$Q'_{41} = nC_p(T_4 - T_1) = \frac{7}{2}nRT_1 = 3,5p_1 V_1 = 350 \text{ J}.$$

Celkové odevzdané teplo je $Q'_{34} + Q'_{41} = 418,4 \text{ J}$.

3 body

e) Celková práce plynu během jednoho cyklu je $W' = Q_{12} - Q'_{34} - Q'_{41} = 81,6 \text{ J}$.

Kruhový děj má účinnost $\eta = \frac{W'}{Q_{12}} = 16,3 \%$.

3 body