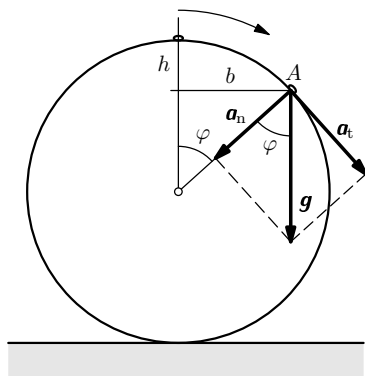


Řešení úloh 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B

Autoři úloh: I. Čáp (6), M. Jarešová (1), L' Konrád (2), P. Šedivý (3, 4, 5)
a B. Vybíral (7). Konečná úprava P. Šedivý

1. a) Tělísko opustí kouli v místě, kde bude výslednice normálového a tečného zrychlení rovna g .



Obr. R1

Dle obr. R1 platí $a_n = \frac{v^2}{R} = g \cos \varphi$, z čehož $\cos \varphi = \frac{v^2}{Rg}$. Ze zákona zachování mechanické energie určíme $v^2 = 2hg$. Po dosazení do vztahu pro $\cos \varphi$ dostaneme $\cos \varphi = \frac{2h}{R}$. Dále dle obr. R1 platí

$$\cos \varphi = \frac{R-h}{R}, \quad \frac{2h}{R} = \frac{R-h}{R},$$

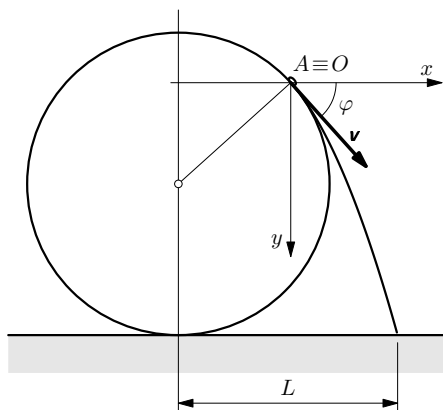
z čehož $h = \frac{R}{3}$, $\cos \varphi = \frac{2}{3}$. Pro b potom platí

$$b = R \sin \varphi = R \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{5}}{3} R.$$

Tělísko opustí kouli ve vodorovné vzdálenosti $b = \frac{\sqrt{5}}{3} R = 0,75 \text{ m}$ v hloubce $h = \frac{R}{3} = 0,33 \text{ m}$ od místa, kde začal jeho pohyb.

3 body

- b) Pohyb od bodu A pokračuje jako vrh šikmý dolů s počátečním úhlem φ (obr. R2).



Obr. R2

Bod A zvolíme za počátek soustavy souřadnic. Pak bude platit

$$x = vt \cos \varphi,$$

$$y = vt \sin \varphi + \frac{1}{2} g t^2.$$

Po dosazení z úlohy a)

$$x = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} Rg} \cdot t, \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{2}{3} Rg} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

V bodě dopadu

$$\frac{5}{3}R = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}Rg} \cdot t + \frac{1}{2}gt^2. \quad (3)$$

Rovnici (3) upravíme na tvar

$$3gt^2 + 2\sqrt{\frac{10}{3}Rg} \cdot t - 10R = 0.$$

Dostaneme kvadratickou rovnici, vyhovuje pouze kladné řešení

$$t = \frac{1}{6} \left(\sqrt{\frac{400}{3}} - 2\sqrt{\frac{10}{3}} \right) \sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{1}{3} (\sqrt{10} - 1) \sqrt{\frac{10R}{3g}}. \quad (4)$$

Vztah (4) dosadíme do (1). Po úpravě dostaneme $x = \frac{1}{27}(20\sqrt{2} - 4\sqrt{5})R$. Vodorovná vzdálenost místa dopadu tělíska od místa dotyku koule s vodorovnou rovinou pak bude

$$L = \frac{\sqrt{5}}{3}R + \frac{1}{27}(20\sqrt{2} - 4\sqrt{5})R = \frac{5}{27}(4\sqrt{2} + \sqrt{5})R.$$

Pro dané hodnoty $L = 1,462$ m.

5 bodů

c) Rychlost dopadu je dána vztahem

$$v = \sqrt{v^2 \cos^2 \varphi + (v \sin \varphi + gt)^2}.$$

Po dosazení za t ze vztahu (4), $v = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$, $\cos \varphi = \frac{2}{3}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$ a úpravě vzniklého vztahu dostaneme

$$v = 2\sqrt{Rg}.$$

Pro dané hodnoty $v = 6,26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Jiné řešení: je možno použít zákona zachování mechanické energie pro nejvyšší a nejnižší polohu tělíska. Dostaneme

$$v = \sqrt{2 \cdot 2Rg} = 2\sqrt{Rg}$$

jako v předchozím postupu.

2 body

2. a) Při srážce koule se sloupkem je splněn zákon zachování momentu hybnosti vzhledem k ose O a zákon zachování mechanické energie (dokonale pružná srážka):

$$Mvx = J\omega_0, \quad \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2,$$

kde v je velikost rychlosti koule těsně před nárazem, ω_0 je úhlová rychlost otáčivého pohybu sloupku okolo osy O těsně po nárazu a J je moment setrvačnosti sloupku vzhledem k ose O . S použitím Steinerovy věty dostaneme

$$J = \frac{1}{3}m(a^2 + h^2).$$

Z uvedených rovnic vyjádříme podmínku pro výšku nárazu

$$x = \sqrt{\frac{J}{M}} = \sqrt{\frac{m(a^2 + h^2)}{3M}}.$$

4 body

Musí ovšem platit $x \leq h$. Z toho plyne podmínka řešitelnosti úlohy a):

$$\frac{M}{m} \geq \frac{a^2 + h^2}{3h^2}.$$

1 bod

- b) Ze zákona zachování mechanické energie určíme kinetickou energii koule těsně před nárazem $E_k = Mgl(1 - \cos \alpha)$. Při otočení do labilní polohy získá sloupek potenciální energii

$$E_p = mg \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \frac{h}{2} \right) = \frac{mg}{2} (\sqrt{a^2 + h^2} - h).$$

Aby došlo k převrácení sloupku, musí platit $E_k > E_p$. Z toho

$$1 - \cos \alpha > \frac{m(\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{2Ml}, \quad \cos \alpha < 1 - \frac{m(\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{2Ml}.$$

4 body

Musí ovšem platit $\alpha < 90^\circ$, tj. $\cos \alpha > 0$. Z toho plyne podmínka řešitelnosti úlohy b):

$$\frac{m(\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{2Ml} < 1 \quad \Rightarrow \quad l > \frac{m}{2M} (\sqrt{a^2 + h^2} - h).$$

1 bod

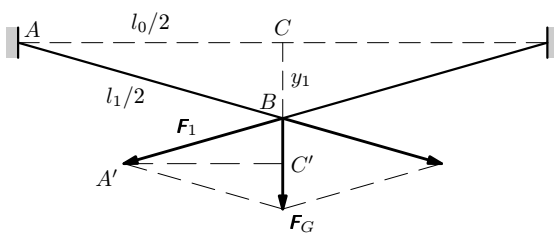
3.a) Z Hookova zákona a z Pythagorovy věty pro $\triangle ABC$ (obr. R3) plyne

$$l_1 - l_0 = \frac{\sigma_1}{E} l_0 = 2 \left(\sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + y_1^2} - \frac{l_0}{2} \right) = l_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2y_1}{l_0}\right)^2} - l_0 \approx$$

$$\approx l_0 \left(1 + \frac{2y_1^2}{l_0^2} - 1 \right) = \frac{2y_1^2}{l_0}.$$

Z toho

$$y_1 \approx l_0 \sqrt{\frac{\sigma_1}{2E}} = 7,4 \text{ cm}.$$



Obr. R3

Z podobnosti trojúhelníků ABC a $A'BC'$ dostaneme

$$\frac{F_G}{2F_1} = \frac{y_1}{\frac{l_1}{2}} \approx \frac{y_1}{\frac{l_0}{2}}, \quad F_G = m_1 g \approx \frac{4F_1}{l_0} y_1 \approx \frac{4\sigma_1 S}{l_0} \cdot l_0 \sqrt{\frac{\sigma_1}{2E}},$$

$$m_1 = \frac{S}{g} \sqrt{\frac{8\sigma_1^3}{E}} = 9,03 \text{ kg.}$$

5 bodů

b) Obdobně jako v části a) dostaneme

$$F_G = mg \approx \frac{4F}{l_0}y \quad \text{pro každé} \quad 0 < y < y_1$$

a také

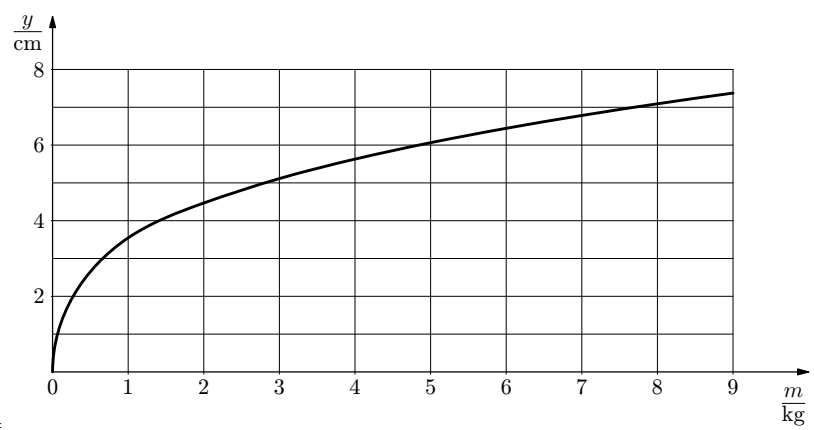
$$\frac{2y^2}{l_0} \approx \frac{Fl_0}{ES}, \quad \text{т.е.} \quad F \approx \frac{2y^2 ES}{l_0^2}.$$

Proto

$$mg \approx \frac{4 \cdot 2y^2 ES}{l_0^3} y, \quad y^3 \approx \frac{mgl_0^3}{8ES}, \quad y \approx l_0 \sqrt[3]{\frac{g}{8ES}} \cdot \sqrt[3]{m}.$$

Po dosazení číselných hodnot

$$\{y\} \approx 0,0355 \sqrt[3]{\{m\}} \quad (\text{viz graf na obr. R4}).$$



Obr. R4

5 bodů

4. a) Vyjdeme ze vztahů

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_1}{k}, \quad T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m_1 + m_2}{k}.$$

Odečtením a úpravou dostaneme

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_2}{k}, \quad k = \frac{4\pi^2 m_2}{T_2^2 - T_1^2} = 20,2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Miska má hmotnost

$$m_1 = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = \frac{m_2 T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = 1,15 \text{ kg}.$$

4 body

b) Amplituda kmitů po uvolnění závaží je stejná jako změna rovnovážné polohy vyvolaná tíhou závaží:

$$y_m = \frac{m_2 g}{k} = \frac{g(T_2^2 - T_1^2)}{4\pi^2} = 0,49 \text{ m}.$$

2 body

c) Na závaží působí během pohybu výslednice tíhové síly $\mathbf{F}_G$ a reakce misky $\mathbf{R}$. Platí

$$\mathbf{F} = m_2 \mathbf{a} = \mathbf{F}_G + \mathbf{R}.$$

Z toho určíme tíhu závaží

$$\mathbf{G} = -\mathbf{R} = \mathbf{F}_G - m_2 \mathbf{a}.$$

Její velikost je

$$G = m_2 g + m_2 a = m_2 (g + a),$$

kde a je **souřadnice zrychlení**, která nabývá střídavě kladných a záporných hodnot. Protože pohyb začíná v horní krajní poloze, platí

$$a = -\omega^2 y = -\omega^2 y_m \cos \omega t,$$

$$G = m_2 g - m_2 \omega^2 y_m \cos \omega t = m_2 g \left(1 - \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2} \cos \frac{2\pi t}{T_2} \right).$$

Největší a nejmenší velikost tíhy jsou v poměru

$$\frac{G_{max}}{G_{min}} = \frac{1 + \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}}{1 - \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}} = \frac{2T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} = 2,7.$$

4 body

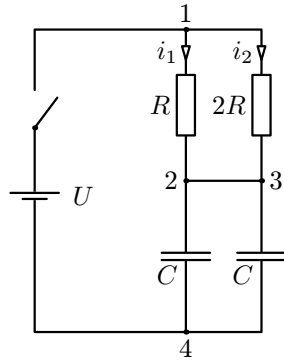
5. a) Kondenzátory se nabíjí na napětí U nábojem $Q = CU$. Označme proudy ve větvích 1–2 a 1–3 podle obr. R5. Během nabíjení kondenzátorů je na obou rezistorech stejné napětí. Proto $i_1 = 2i_2$. Označme Q_1 náboj, který projde rezistorem o odporu R , a Q_2 náboj, který projde rezistorem o odporu $2R$ a Q_3 náboj, který prošel větví 2–3. Platí

$$Q_1 = 2Q_2, \quad Q_1 + Q_2 = 2Q.$$

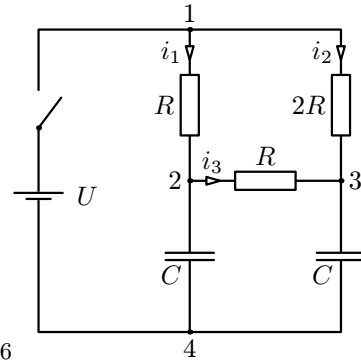
Řešením této soustavy rovnic je $Q_1 = \frac{4}{3}Q$, $Q_2 = \frac{2}{3}Q$.

Do uzlu 2 tedy byl rezistorem o odporu R přiveden náboj $Q_1 = \frac{4}{3}Q$, ale kondenzátor přijal jen náboj Q . Rozdíl, tj. náboj $Q_3 = \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}UC$, přešel do uzlu 3.

3 body



Obr. R5



Obr. R6

- b) V druhém případě označíme proudy procházející rezistory podle obr. R6. Součet napětí na rezistorech o odporu R je roven napětí na rezistoru o odporu $2R$. Z toho

$$Ri_1 + Ri_3 = 2Ri_2 \Rightarrow i_1 + i_3 = 2i_2 \rightarrow Q_1 + Q_3 = 2Q_2$$

Řešením soustavy rovnic

$$Q_1 + Q_3 = 2Q_2, \quad Q_1 - Q_3 = Q = CU, \quad Q_2 + Q_3 = Q = CU$$

dostaneme $Q_3 = \frac{Q}{4} = \frac{CU}{4}$.

4 body

- c) Během nabíjení kondenzátorů vykoná zdroj v obou případech elektrickou práci $W_z = 2UQ = 2CU^2$, ale kondenzátory získají energii $2E_C = 2 \cdot \frac{1}{2}CU^2 = CU^2$. Rozdíl, tj. $Q_j = CU^2$, spotřebují rezistory jako Joulovo teplo.

3 body

7. a) Označíme-li m_{He} hmotnost helia v balónku a m_{v0} hmotnost vzduchu vytlačeného balónkem ve výšce $h = 0$, bude podle Archimedova zákona a podle druhého pohybového zákona platit

$$(m_{\text{He}} + m_{\text{b}}) a_0 = (m_{\text{v0}} - m_{\text{He}} - m_{\text{b}}) g \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{m_{\text{v0}} - m_{\text{He}} - m_{\text{b}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{b}}} g.$$

Hmotnosti plynů určíme ze stavové rovnice:

$$m_{\text{v0}} = \frac{p_{\text{a0}} V_0 M_{\text{m}}}{T_0 R} = 8,76 \cdot 10^{-3} \text{ kg},$$

$$m_{\text{He}} = \frac{p_0 V_0 M'_{\text{m}}}{T_0 R} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

$$\text{Pak } a_0 = \frac{8,76 - 1,23 - 2,5}{1,23 + 2,5} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 13,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

- b) Mezi objemem a přetlakem platí přímá úměrnost. Proto můžeme pro výšky $h = 0$ a h psát

$$V_0 = k(p_0 - p_{\text{a0}}), \quad V = k(p - p_{\text{a}}). \quad \text{Z toho } \frac{V}{V_0} = \frac{p - p_{\text{a}}}{p_0 - p_{\text{a0}}}.$$

Tlak p helia ve výšce h , kde balónek praskne, vyjádříme podle Boylova zákona a atmosférický tlak p_{a} v téže výšce podle barometrické rovnice:

$$p = p_0 \frac{V_0}{V}, \quad p_{\text{a}} = p_{\text{a0}} e^{-\frac{M_{\text{m}}}{RT_0} gh}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= \frac{p_0 \frac{V_0}{V} - p_{\text{a0}} e^{-\frac{M_{\text{m}}}{RT_0} gh}}{p_0 - p_{\text{a0}}}, \quad \frac{V}{V_0} = \alpha, \\ \alpha(p_0 - p_{\text{a0}}) &= \frac{p_0}{\alpha} - p_{\text{a0}} e^{-\frac{M_{\text{m}}}{RT_0} gh}, \quad e^{-\frac{M_{\text{m}}}{RT_0} gh} = \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\text{a0}}}, \\ h &= -\frac{RT_0}{M_{\text{m}} g} \ln \left[\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\text{a0}}} \right] = 10\,400 \text{ m}. \end{aligned}$$

5 bodů

- c) Aby balónek vůbec vystoupil do výšky h určené v části b), musí podle Archimedova zákona pro hmotnost m_{v} vzduchu vytlačeného balónkem v této výšce platit $m_{\text{v}} \geq m_{\text{He}} + m_{\text{b}}$.

$$m_{\text{v}} = \frac{p_{\text{a}} V M_{\text{m}}}{T_0 R} = \frac{p_{\text{a0}} \alpha V_0 M_{\text{m}}}{T_0 R} e^{-\frac{M_{\text{m}}}{RT_0} gh} = \frac{p_{\text{a0}} \alpha V_0 M_{\text{m}}}{T_0 R} \left[\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\text{a0}}} \right].$$

V našem případě $m_{\text{v}} = 7,68 \text{ g} > 3,73 \text{ g} = m_{\text{He}} + m_{\text{b}}$.

Aby vyšlo $h > 0$, musí pro argument přirozeného logaritmu platit

$$0 < \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\text{a0}}} < 1.$$

V našem případě $\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{p_0}{p_{\text{a0}}} = 0,2922$. Podmínka je tedy splněna.

3 body