Řešení úloh regionálního kola 45. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autoři úloh: B. Vybíral (1), P. Šedivý (2, 3, 4)

1. a) Z Torricelliho vztahu pro výtokovou rychlost

$$v = \sqrt{2g(h - h')}$$

a ze zákonů vodorovného vrhu

$$L = vt\,, \qquad h' = \frac{1}{2}gt^2$$

plyne

$$L^2 = v^2t^2 = 2g(h - h') \cdot \frac{2h'}{g} = 4h'(h - h')\,, \qquad 4h'^2 - 4hh' + L^2 = 0\,.$$

3 body

Rovnice má dva reálné kořeny

$$h'_{1,2} = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - L^2}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 450 \text{ mm}, \\ 50 \text{ mm}. \end{array} \right.$$

Úloha má tedy dvě řešení: z otvoru ve výšce $h'_1 = 450$ mm bude voda vytékat rychlostí $v_1 = \sqrt{2g(h - h'_1)} = 0{,}99\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, z otvoru ve výšce $h'_2 = 50$ mm bude voda vytékat rychlostí $v_2 = \sqrt{2g(h - h'_2)} = 2{,}97\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

3 body

b) Rozdíl tlaků je $\Delta p = p_\mathrm{a} - p_0 = h_0 \varrho g = 981$ Pa.

1 bod

c) Hlakina bude klesat konstantní rychlostí. Za dobu T vyteče otvorem voda o objemu

$$V = \frac{\pi D^2 h_0}{4} = \frac{\pi d^2}{4} vT\,.$$

Z toho

$$T = \frac{D^2 h_0}{d^2 v} = \frac{D^2 h_0}{d^2 \sqrt{2g(h - h')}}\,.$$

Pokud uděláme otvor ve výšce h'_1, klesne hladina ke spodnímu konci trubičky za dobu $T_1 \doteq 250$ s, pokud jej uděláme ve výšce h'_2, bude to za dobu $T_2 = 84$ s.

3 body

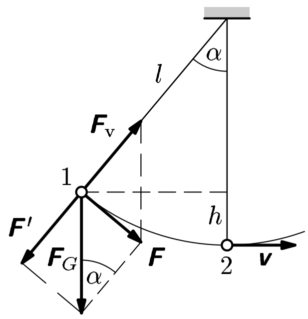
2. a) Hmotnost tělesa označíme m, délku vlákna l. V krajní poloze 1 působí na těleso tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ a tahová síla vlákna $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$. Účinek tahová síly vlákna se ruší s účinkem tahové složky $\boldsymbol{F}'$ tíhové síly. Výsledná síla $\boldsymbol{F}$ působící na těleso v krajní poloze je tedy pohybovou složkou tíhové síly a má velikost $F = mg\sin\alpha$ (obr. R1). Tato výslednice uděluje tělesu tečné zrychlení o velikosti $a_{\mathrm{t}1} = g\sin\alpha$. Normálové zrychlení je nulové.

V krajní poloze je kinetická energie nulová, potenciální energie tíhová je $E_\mathrm{p} = mgh$. V rovnovážné poloze 2 je nulová potenciální energie tíhová, kinetická energie je $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$. Ze zákona zachování energie $E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k}$ určíme

$$v^2 = 2gh\,, \quad \text{kde } h = l(1-\cos\alpha)\,.$$

Rovnovážnou polohou prochází těleso s normálovým zrychlením o velikosti

$$a_{\mathrm{n}2} = \frac{v^2}{l} = \frac{2gh}{l} = 2g(1-\cos\alpha)\,.$$



Obr. R1

Tečné zrychlení je nulové. Podle zadání je $a_{\mathrm{t}1} = a_{\mathrm{n}2}$. Po dosazení:

$$g\sin\alpha = 2g(1-\cos\alpha)\,, \quad \sin\alpha = 2(1-\cos\alpha)\,.$$

Úpravou posledního vztahu dostaneme kvadratickou rovnici

$$5\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 3 = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kořen $\cos\alpha = 0{,}6\,, \quad \alpha = 53^\circ 8'\,.$
Těleso musí být vychýleno o $53^\circ 8'$, aby tečné zrychlení v krajní poloze bylo stejně velké jako normálové zrychlení v rovnovážné poloze.

5 bodů

b) V krajních polohách je vlákno napínáno tahovou složkou tíhové síly o velikosti $F_1 = mg\cos\alpha_1$. Při průchodu rovnovážnou polohou působí těleso na vlákno celou tíhou a odstředivou silou. Jejich výslednice má velikost

$$F_2 = m(g + a_\mathrm{n}) = mg + 2mg(1-\cos\alpha_1) = mg(3 - 2\cos\alpha_1)\,.$$

Podle zadání platí $F_2 = 2F_1$. Po dosazení

$$mg(3 - 2\cos\alpha_1) = 2mg\cos\alpha_1\,, \qquad \cos\alpha_1 = \frac{3}{4}\,, \qquad \alpha = 41^\circ 25'\,.$$

Při vychýlení tělesa o úhel $41^\circ 25'$ bude vlákno napínáno v rovnovážné poloze silou o dvojnásobné velikosti než je velikost síly, kterou je vlákno napínáno v krajní poloze.

5 bodů

3. a) Z grafu určíme amplitudu rychlosti $v_\mathrm{m} = 1{,}50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a periodu $T = 1{,}20\ \mathrm{s}$. Amplitudu výchylky a amplitudu zrychlení určíme ze vztahů

$$y_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{m}}{\omega} = \frac{v_\mathrm{m} T}{2\pi} = 0{,}286\ \mathrm{m}\,, \qquad a_\mathrm{m} = \omega v_\mathrm{m} = \frac{2\pi v_\mathrm{m}}{T} = 7{,}85\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

3 body

b) Tuhost pružiny je

$$k = m\omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 8{,}2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}\,.$$

1,5 bodu

c) Mechanická energie kmitání je

$$E_\mathrm{km} = \frac{1}{2} k y_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2} m v_\mathrm{m}^2 = 0{,}338\ \mathrm{J}\,.$$

1,5 bodu

d) Průměrná rychlost je

$$v_\mathrm{p} = \frac{4 y_\mathrm{m}}{T} = \frac{2 v_\mathrm{m}}{\pi} = 0{,}955\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

e) Zavěšením tělesa způsobíme prodloužení pružiny

$$\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0{,}358\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

4. Elektrická práce topné spirály $W_{\mathrm{el}} = \dfrac{U^2\tau}{R}$ se spotřebuje na teplo potřebné k ohřátí ledu na teplotu tání

$$Q_1 = (K + mc_1)(0\,^\circ\mathrm{C} - t_1) = 1{,}472 \cdot 10^4\ \mathrm{J}\,,$$

skupenské teplo tání ledu $L_{\mathrm{t}} = ml_{\mathrm{t}} = 2{,}822 \cdot 10^5$ J
a teplo potřebné k ohřátí vody na výslednou teplotu

$$Q_2 = (K + mc_2)(t_2 - 0\,^\circ\mathrm{C}) = 9{,}0625 \cdot 10^4\ \mathrm{J}\,.$$

Příkon topného tělíska je $P = \dfrac{Q_1 + L_{\mathrm{t}} + Q_2}{\tau} \doteq 144$ W

4 body

a napětí zdroje $U = \sqrt{PR} = 29$ V.

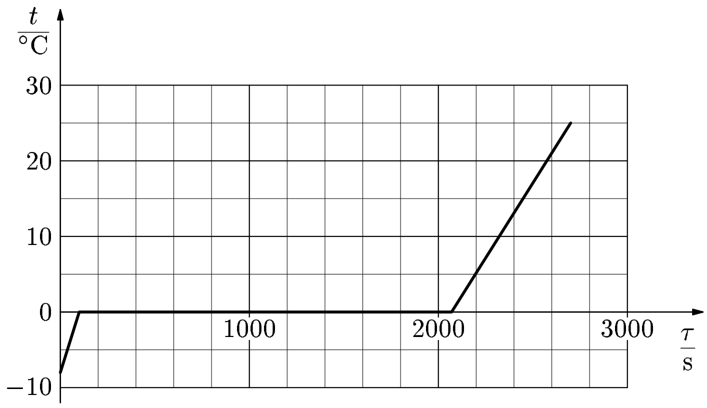
2 body

Doby trvání jednotlivých částí děje jsou

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{P} \doteq 100\ \mathrm{s}\,, \qquad \tau_2 = \frac{L_{\mathrm{t}}}{P} \doteq 1\,970\ \mathrm{s}\,, \qquad \tau_3 \doteq \frac{Q_2}{P} = 630\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

Časový průběh celého děje zobrazuje graf na obr. R2. **2 body**



Obr. R2