Řešení úloh 1. kola 45. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Randa (1, 2, 3, 4), J. Jírů (5), K. Rauner (6) a M. Jarešová (7)
Konečná úprava P. Šedivý

1. a) Na puk působí ve směru nakloněné roviny pohybová složka tíhové síly $F_1 = mg\sin\alpha$ a třecí síla $F_t = fmg\cos\alpha = kxmg\cos\alpha$. Výslednice těchto sil mu udělí tečné zrychlení

$$a = g(\sin\alpha - kx\cos\alpha)\,.$$

Největší rychlosti dosáhne puk v místě, kde bude zrychlení nulové, tedy ve vzdálenosti

$$x_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}\,.$$

2 body

Rychlost v tomto místě určíme ze zákona zachování energie:

$$mgx_1\sin\alpha = \overline{F}_t x_1 + \frac{1}{2}mv^2\,,$$

kde $\overline{F}_t = \frac{1}{2}kx_1 mg\cos\alpha$ je střední velikost třecí síly na dráze x. Po úpravě

$$v = \sqrt{2gx_1\sin\alpha - kgx_1^2\cos\alpha} = \sin\alpha\sqrt{\frac{g}{k\cos\alpha}}\,.$$

3 body

b) Puk se zastaví ve vzdálenosti x', kterou opět určíme ze zákona zachování energie:

$$mgx'\sin\alpha = \frac{1}{2}kx'mg\cos\alpha\cdot x' \qquad x' = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{k}\,.$$

2 body

c) Nejvyšší poloha, ve které může puk zůstat ležet poté, co sem dojede zdola, je $x_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}$. Označme x_0 hledanou vzdálenost zarážky od vrcholu. Podle zákona zachování energie dostaneme:

$$mgx_1\sin\alpha = \frac{1}{2}kx_0 mg\cos\alpha\cdot x_0 + \frac{1}{2}k(x_1+x_0)mg\cos\alpha\cdot(x_0-x_1)\,.$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x_1\,.$$

2 body

2. a) Protože jde o lineární závislost, platí $p = aV + b$, kde $a < 0$, $b > 0$ jsou konstanty. Řešením soustavy rovnic

$$p_A = aV_A + b\,, \qquad \frac{p_A}{8} = 4{,}5aV_A + b$$

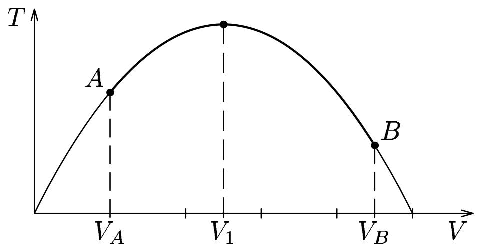
dostaneme $\quad a = -\dfrac{p_A}{4V_A}\,, \qquad b = \dfrac{5}{4}p_A\,.$ Z toho $\; p = \dfrac{p_A}{4V_A}(5V_A - V)\,.$

Teplotu určíme ze stavové rovnice (R je molární plynová konstanta):

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{p_A}{4V_A nR} \cdot (5V_A V - V^2)\,.$$

Jedná se o kvadratickou funkci s konkávním grafem (obr. R1). Plyn bude mít maximální teplotu při objemu $V_1 = 2{,}5V_A$. Platí

$$T_{\max} = \frac{25p_A V_A}{16nR}\,, \qquad T_A = \frac{p_A V_A}{nR}\,, \qquad T_B = \frac{9p_A V_A}{16nR}\,.$$



Obr. R1

4 body

b) Práci vykonanou při ději A-X vypočítáme z p-V diagramu:

$$W' = \frac{1}{2}(p_A + p)(V - V_A) = \ldots = -\frac{p_A}{8V_A} \cdot V^2 + \frac{5p_A}{4} \cdot V - \frac{9p_A V_A}{8}\,.$$

Vnitřní energie plynu se změní o

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T - T_A) = \ldots = \frac{3p_A}{8V_A}(-V^2 + 5V_A V - 4V_A^2)),.$$

Dodané teplo určíme z prvního termodynamického zákona:

$$Q = \Delta U + W' = \frac{p_A}{8V_A}(-4V^2 + 25V_A V - 21V_A^2) = \frac{p_A}{2V_A}\left[\frac{289V_A^2}{64} - \left(V - \frac{25V_A}{8}\right)^2\right].$$

3 body

c) Hledaný objem V_2 odpovídá maximu funkce $Q(V)$, tedy $V_2 = \dfrac{25}{8}V_A = 3{,}125V_A$.

1 bod

d) Při ději $V_A \to V_1$ je plynu dodáváno teplo, plyn koná práci a jeho teplota a vnitřní energie se zvětšuje.
Při ději $V_1 \to V_2$ je plynu dodáváno teplo, plyn koná práci, ale jeho teplota a vnitřní energie se zmenšuje.
Při ději $V_2 \to V_B$ je plynu odebíráno teplo, plyn koná práci a jeho teplota a vnitřní energie se zmenšuje.

2 body

3. a) Až do okamžiku odpoutání destičky se závaží pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem a působí na něj kromě tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a síly pružiny $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ také reakce destičky $\boldsymbol{R}$. Platí

$$ma = F_G - F_\mathrm{p} - R = mg - kh - R\,, \qquad R = m(g-a) - kh\,.$$

V hloubce h_1 je $R = 0$. Z toho $h_1 = \dfrac{m(g-a)}{k} = 0{,}0981\ \mathrm{m}$.

Dále platí $h_1 = \dfrac{1}{2}at_1^2\,, \qquad t_1 = \sqrt{\dfrac{2h_1}{a}} = \sqrt{\dfrac{2m(g-a)}{ka}} = 0{,}200\ \mathrm{s}$.

2 body

b) Pro úhlovou frekvenci a periodu kmitů platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7{,}07\ \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}889\ \mathrm{s}\,.$$

V rovnovážné poloze platí $mg = kh_0$. Z toho $h_0 = \dfrac{mg}{k} = 0{,}196\ \mathrm{m}$.
Celkovou energii kmitavého pohybu můžeme určit z pohybového stavu v čase t_1, kdy se závaží pohybuje rychlostí $v_1 = at_1 = \sqrt{\dfrac{2ma(g-a)}{k}}$. Platí

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(h_1 - h_0)^2 = \frac{m^2a(g-a)}{k} + \frac{k}{2}\left(\frac{m(g-a)}{k} - \frac{mg}{k}\right)^2\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$A = \frac{m}{k}\sqrt{2ag - a^2} = 0{,}170\ \mathrm{m}\,, \qquad v_\mathrm{m} = \omega A = \sqrt{\frac{m}{k}(2ag - a^2)} = 1{,}20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

c) Průběh rovnoměrně zrychleného pohybu v časovém intervalu $\langle 0, t_1\rangle$ popisují funkce

$$v = at, \qquad h = \frac{1}{2}at^2.$$

Kmity popisují funkce

$$h - h_0 = A\sin[\omega(t - t_1) + \varphi_1]\,, \qquad v = v_\mathrm{m}\cos[\omega(t - t_1) + \varphi_1]\,.$$

(Směr dolů jsme zavedli jako kladný.) Fázi φ_1 v čase t_1 určíme z pohybového stavu v čase t_1. Platí

$$h_1 - h_0 = A\sin\varphi_1\,, \qquad v_1 = A\omega\cos\varphi_1\,.$$

Po dosazení z předchozích vztahů dostaneme

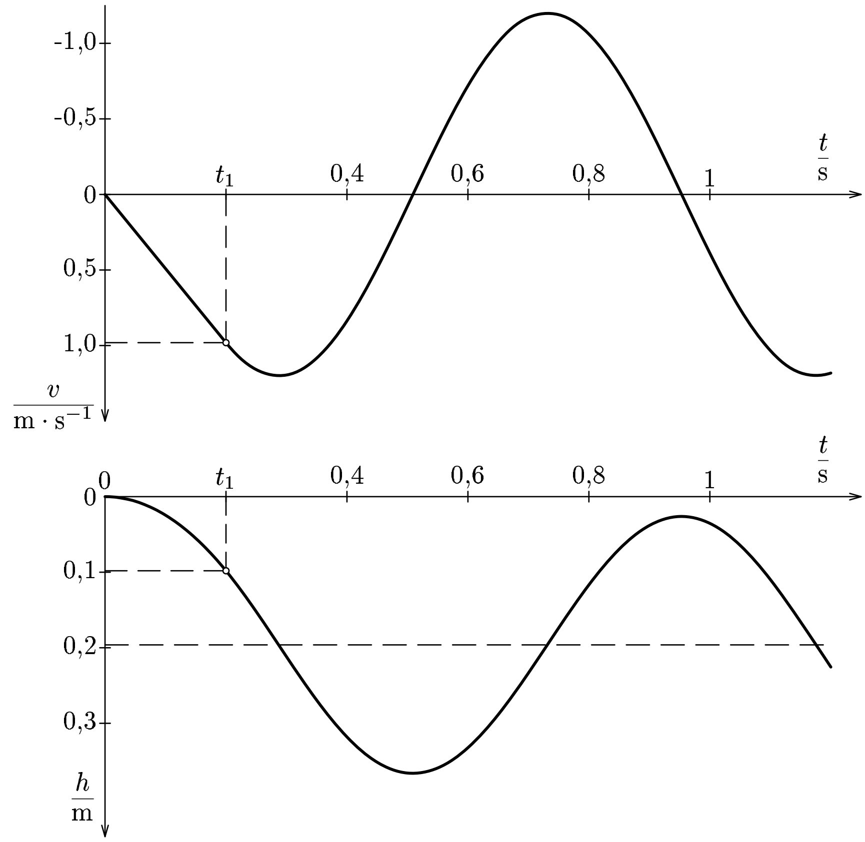
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{(h_1 - h_0)\omega}{v_1} = \frac{-\dfrac{ma}{k}\cdot\sqrt{\dfrac{k}{m}}}{\sqrt{\dfrac{2ma(g-a)}{k}}} = -\frac{a}{\sqrt{2a(g-a)}} = -\sqrt{\frac{a}{2(g-a)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\varphi_1 = -0{,}615\ \mathrm{rad} = -35{,}3^\circ\,.$$

Závislost hloubky závaží a jeho okamžité rychlosti na čase během kmitání popisují pro dané hodnoty veličin funkce

$$\{h\} = 0{,}1962 + 0{,}170\sin(7{,}07\{(t-t_1)\} - 0{,}615)\,,$$

$$\{v\} = 1{,}20\cos(7{,}07\{(t-t_1)\} - 0{,}615)\,.$$



5 bodů

4. Veškeré numerické výpočty byly provedeny v přiložené tabulce EXCELu.

a) Pára v nádobě splňuje stavovou rovnici

$$\frac{pV_0}{T} = \frac{m_\mathrm{p}R}{M_\mathrm{m}},$$

kde m_p je hmotnost páry, $M_\mathrm{m} = 18{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$ je molární hmotnost vody a R je molární plynová konstanta. Hmotnost sytých vodních par při absolutní teplotě T určíme pomocí vztahu

$$m_\mathrm{p} = \frac{p_\mathrm{s}V_0M_\mathrm{m}}{RT},$$

kde p_s je tlak sytých vodních par uvedený v druhém sloupci tabulky. Výpočet provedeme ve třetím sloupci tabulky. Až do vypaření veškeré vody bude platit $m_\mathrm{p} < m$ a tlak p v nádobě, který zapisujeme do 4. sloupce, je roven tlaku p_s. Při teplotě 90 °C hmotnost m_p ve 3. sloupci překročí hmotnost veškeré vody m. To znamená, že pára v nádobě už nebude sytá a při výpočtu jejího tlaku ve 4. sloupci tabulky použijme vztah

$$p = \frac{mRT}{M_\mathrm{m}V_0}.$$

3 body

b) Protože tlaková síly sytých par na píst při teplotě 20 °C je větší než tíha pístu, je už ve výchozím stavu pružina poněkud stlačena. Zvýšíme-li teplotu, zvětší se tlaková síla par a píst se zvedne do výše h, přičemž platí

$$(p - p_{20})S = kh, \qquad h = \frac{(p - p_{20})S}{k}.$$

Objem nádoby se zvětší podle vztahu

$$V = V_0 + Sh = V_0 + \frac{(p - p_{20})S^2}{k}.$$

Až do vypaření veškeré vody bude platit $m_\mathrm{p} < m$ a tlak p v nádobě, který zapisujeme do 6. sloupce, je roven tlaku p_s. Hmotnost syté páry v nádobě vypočítáme v 5. sloupci tabulky podle vztahu

$$m_\mathrm{p} = \frac{p_\mathrm{s}VM_\mathrm{m}}{RT} = \frac{p_\mathrm{s}M_\mathrm{m}\left[V_0 + \dfrac{(p_\mathrm{s} - p_{20})S^2}{k}\right]}{RT}.$$

Při teplotě 70 °C vychází hmotnost syté páry větší než je hmotnost veškeré vody v nádobě. Pára už není sytá a její tlak určíme řešením rovnice

$$p = \frac{mRT}{M_\mathrm{m}V} = \frac{mRT}{M_\mathrm{m}\left[V_0 + \dfrac{(p - p_{20})S^2}{k}\right]}.$$

Po úpravě

$$\frac{S^2}{k}p^2 - \left(V_0 - \frac{S^2p_{20}}{k}\right)p - \frac{mRT}{M_\mathrm{m}} = 0,$$

$$p = \frac{-V_0 + \dfrac{S^2 p_{20}}{k} \pm \sqrt{\left(V_0 - \dfrac{S^2 p_{20}}{k}\right)^2 + \dfrac{4S^2 mRT}{kM_\mathrm{m}}}}{\dfrac{2S^2}{k}},$$

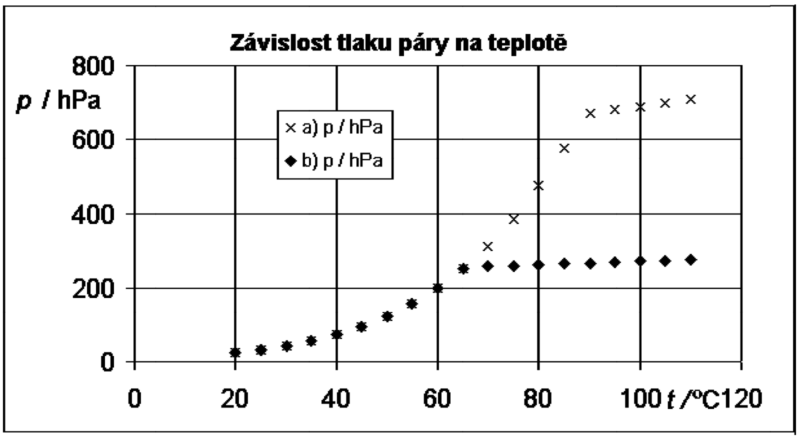
kde znaménko minus nevyhovuje protože vede k záporným tlakům. Podle tohoto vzorce dopočítáme 6. sloupec tabulky.
Zbývá určit závislost objemu nádoby na teplotě. Výpočet v sedmém sloupci tabulky provedeme v celém teplotním rozsahu podle vzorce

$$V = V_0 + \frac{(p - p_{20})S^2}{k}.$$

t / °C	p_s / hPa	m_p / g	a) p / hPa	m_p / g	b) p / hPa	V / l
0	6,106					
10	12,27					
20	23,33	0,17	23,33	0,17	23,33	10,0
25	31,73	0,23	31,73	0,24	31,73	10,5
30	42,40	0,30	42,4	0,34	42,40	11,2
35	56,26	0,40	56,26	0,48	56,26	12,1
40	73,73	0,51	73,73	0,67	73,73	13,2
45	95,86	0,65	95,86	0,95	95,86	14,5
50	123,3	0,83	123,3	1,34	123,3	16,2
55	157,6	1,04	157,6	1,91	157,6	18,4
60	199,2	1,29	199,2	2,72	199,2	21,0
65	250,1	1,60	250,1	3,87	250,1	24,2
70	311,6	1,97	311,6	5,51	257,4	24,6
75	385,4	2,40	385,4	7,82	259,7	24,8
80	473,6	2,90	473,6	11,07	261,9	24,9
85	578,0	3,49	578,0	15,61	264,1	25,1
90	701,1	4,18	670,9	21,89	266,4	25,2
95	845,3	4,97	680,2	30,51	268,6	25,3
100	1013,2	5,88	689,4	42,25	270,7	25,5
105	1208	6,92	698,7	58,12	272,9	25,6
110	1433	8,10	707,9	79,44	275,1	25,7

5 bodů

c) Grafy závislosti tlak na teplotě jsou na obr. R2. **2 body**



Obr. R2

5. a) Kabel a varná konvice jsou dva sériově spojené spotřebiče o odporech R_v a

$$R = \frac{U_j^2}{P_j} \,. \tag{1}$$

Obvodem prochází proud $I = \dfrac{U_0}{R+R_v} = \dfrac{U}{R}$. Použitím vztahu (1) dostaneme

$$U = \frac{R}{R+R_v}U_0 = \frac{U_0^3}{U_0^2 + R_v P_j} = 220\ \mathrm{V}\,. \tag{2}$$

Skutečný příkon konvice je $P = \dfrac{U^2}{R}$. S užitím vztahů (1) a (2) dostaneme

$$P = \frac{U_0^4 P_j}{(U_0^2 + P_j R_v)^2} = 1\,830\ \mathrm{W}\,. \tag{3}$$

3 body

b) Výkon odebíraný ze sítě je $P_s = \dfrac{U_0^2}{R+R_v}$. Užitím vztahu (1) dostaneme

$$P_s = \frac{U_0^2 P_j}{U_0^2 + P_j R_v} = 1913\ \mathrm{W}\,. \tag{4}$$

Ztrátový výkon ve vedení je $P_v = P_s - P$. Dosazením z (3) a (4) a úpravou dostaneme

$$P_v = \frac{U_0^2 P_j^2 R_v}{(U_0^2 + P_j R_v)^2} = 83\ \mathrm{W}\,. \tag{5}$$

3 body

c) Grafy (obr. R3) sestrojíme na základě vztahů (3), (4) a (5), v nichž konstantní odpor vedení R_v nahradíme odporem

$$R'_v = \frac{1}{l_0} R_v = \frac{1{,}2\ \Omega}{60\ \text{m}} \cdot l = 0{,}02\ \frac{\Omega}{\text{m}} \cdot l\,.$$

Hodnoty pro sestrojení grafů jsou v tabulce:

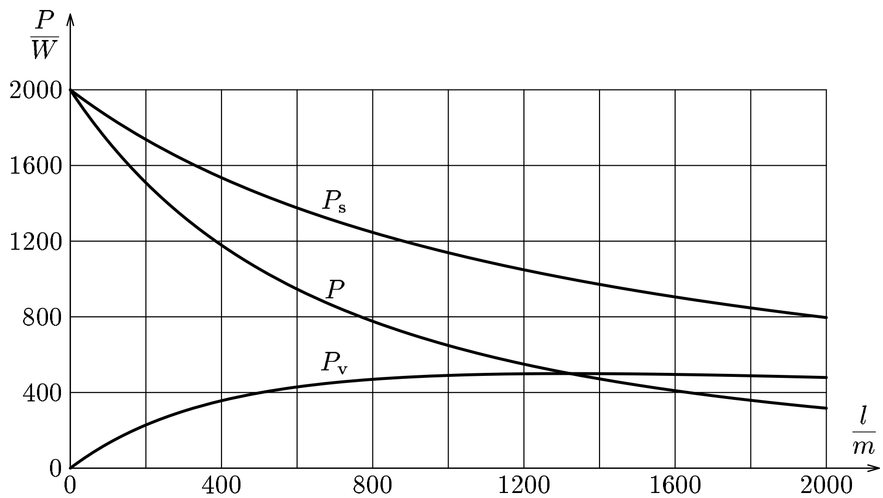
l/m	0	60	200	400	800	1200	1600	2000
P/W	2000	1830	1509	1179	776	550	410	317
P_s/W	2000	1913	1737	1536	1246	1049	905	796
P_v/W	0	83	228	357	470	499	495	479

3 body

d) Pro žárovku vychází hodnoty

$$U' = 229{,}5\ \text{V}\,,\quad P' = 99{,}5\ \text{W}\,,\quad P'_s = 99{,}8\ \text{W}\,,\quad P_v = 0{,}23\ \text{W}\,.$$

1 bod

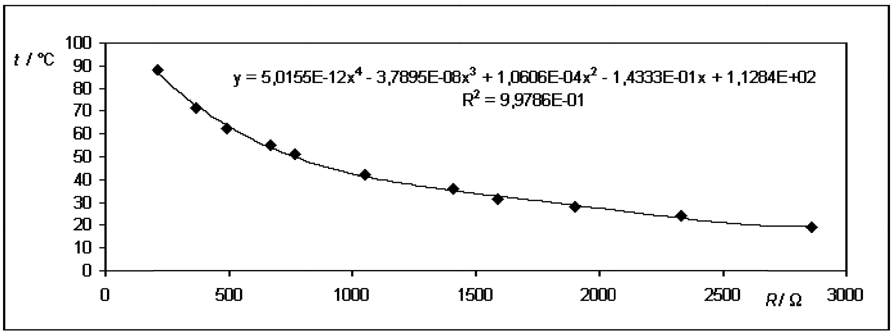


Obr. R3

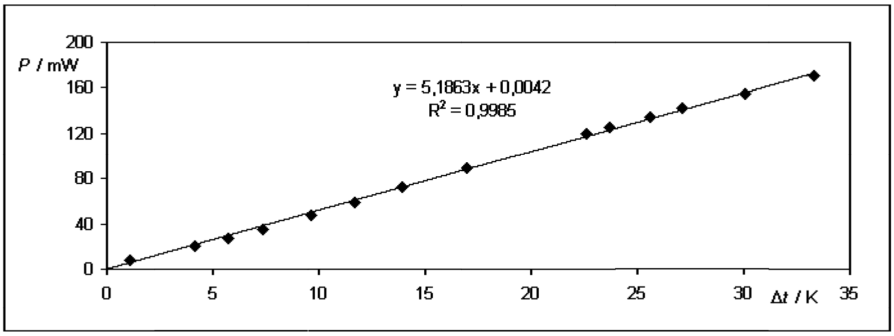
6. V následujících tabulkách a grafech zpracovaných EXCELem jsou zachyceny výsledky měření na termistoru NTC o jmenovitém odporu 2,2 kΩ s dovoleným příkonem 0,25 W. Regresní vzorec z prvního grafu, který vyjadřuje teplotu termistoru jako funkci jeho odporu, byl použit v posledním řádku druhé tabulky při určení rozdílu teploty termistoru a teploty okolí.

t / °C	88,2	71,5	62,2	54,8	51	42	35,7	31,7	28,3	23,9	19,3
R / Ω	211	367	491	667	768	1050	1407	1589	1902	2330	2860

t_o = 23 °C
R_{25} = 2,2 kΩ



U / V	2,61	4,29	6,45	7,24	7,91	8,67	9,23	9,68	10,02	10,33	10,38	10,39	10,4	10,3	10,33
I / mA	1,113	1,902	3,18	3,79	4,44	5,41	6,37	7,48	8,95	11,56	12,08	12,93	13,64	16,55	14,95
P / mW	2,90	8,16	20,5	27,4	35,1	46,9	58,8	72,4	89,7	119,4	125,4	134,3	141,9	170,5	154,4
R / Ω	2345	2256	2028	1910	1782	1603	1449	1294	1120	894	859	804	762	622	691
Δt / K	-0,04	1,10	4,13	5,70	7,36	9,64	11,66	13,91	17,01	22,61	23,68	25,58	27,11	33,34	30,08

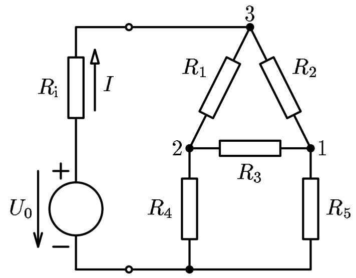


5,18625	0,00421
0,05628	1,05733
0,99847	2,30608
8492,08	13
45160,9	69,134

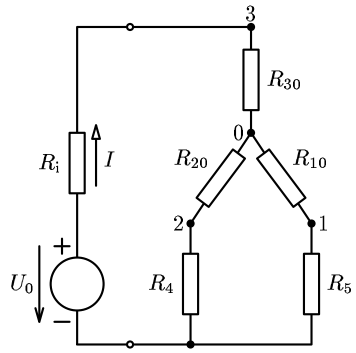
Z regresního vzorce druhého grafu je zřejmé, že zvýšení teploty termistoru je téměř přesně přímo úměrné jeho příkonu. Regresním výpočtem pomocí maticového vzorce dostaneme třetí tabulku, ze které vyčteme, že zatěžovací konstanta daného termistoru má hodnotu $D = (5{,}19 \pm 0{,}06)$ mW/K.

Poznámka: Použití EXCELu v podobných úlohách podrobně vysvětluje studijní text TEPLOTNÍ ZÁVISLOSTI FYZIKÁLNÍCH VELIČIN (Knihovnička FO č. 51).

7. a) Obvod překreslíme dle obr. R4, pak provedeme transfiguraci dle obr. R5.

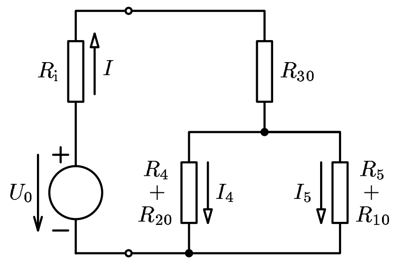


Obr. R4



Obr. R5

Nové náhradní schéma:



Obr. R6

Po transfiguraci:

$$R_{10} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 10\ \Omega\,,$$

$$R_{20} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 5\ \Omega\,,$$

$$R_{30} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10}{3}\ \Omega\,.$$

Celkový odpor sítě rezistorů R_1 až R_5 je

$$R = R_{30} + \frac{(R_{20} + R_4)(R_{10} + R_5)}{R_{20} + R_4 + R_{10} + R_5} = \frac{610}{21}\ \Omega \doteq 29\ \Omega\,.$$

Zdroj dodává do obvodu proud

$$I = \frac{U_0}{R + R_\mathrm{i}} = \frac{126}{143}\ \mathrm{A} \doteq 0{,}88\ \mathrm{A}\,,$$

který se rozděluje v poměru $\dfrac{I_5}{I_4} = \dfrac{R_4 + R_{20}}{R_5 + R_{10}} = \dfrac{45}{60}$. Rezistorem R_5 prochází proud

$$I_5 = I \cdot \frac{R_4 + R_{20}}{R_4 + R_{20} + R_5 + R_{10}} = \frac{54}{143}\ \mathrm{A} \doteq 0{,}38\ \mathrm{A}\,.$$

Na svorkách zdroje a na rezistoru R_5 jsou napětí

$$U = RI = \frac{3660}{143}\ \mathrm{V} \doteq 25{,}6\ \mathrm{V}\,, \qquad U_5 = R_5 I_5 = \frac{2700}{143}\ \mathrm{V} \doteq 18{,}9\ \mathrm{V}\,.$$

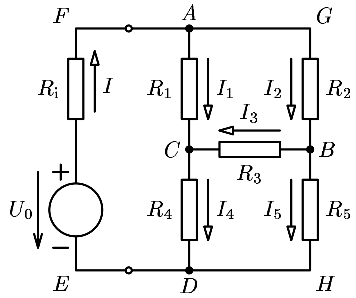
3 body

b) Řešení pomocí Kirchhoffových zákonů
Uzly
(po řadě B, C, D):

$$\begin{aligned} I_2 - I_3 - I_5 &= 0 \\ I_1 + I_3 - I_4 &= 0 \\ I_4 + I_5 - I &= 0 \end{aligned}$$

Smyčky
(po řadě $ADEF$, $AGBC$, $BHDC$):

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_4 I_4 + R_\mathrm{i} I - U_0 &= 0 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_1 I_1 &= 0 \\ R_5 I_5 - R_4 I_4 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned}$$



Obr. R7

Po vhodném dosazení proudů do rovnic pro smyčky dostaneme:

$$\begin{aligned} R_1(I - I_5 - I_3) + R_4(I - I_5) + R_\mathrm{i} I - U_0 &= 0 \\ R_2(I_3 + I_5) + R_3 I_3 - R_1(I - I_3 - I_5) &= 0 \\ R_5 I_5 - R_4(I - I_5) - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Po dosazení konkrétních hodnot odporů jednotlivých rezistorů a úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} 11I - 2I_3 - 10I_5 &= 6 \\ -I + 6I_3 + 3I_5 &= 0 \\ -4I \ - 3I_3 + 9I_5 &= 0 \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme třemi a přičteme k ní druhou rovnici, třetí rovnici vynásobíme dvěma a rovněž k ní přičteme druhou rovnici. Dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 32I - 27I_5 &= 18 \\ -9I + 21I_5 &= 0 \end{aligned}$$

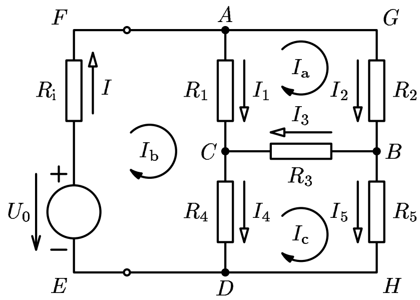
Řešením této soustavy dostaneme: $I = \frac{126}{143}$ A $\doteq$ 0,88 A, $I_5 = \frac{54}{143}$ A $\doteq$ 0,38 A.
Napětí na rezistoru R_5 pak je $U_5 = R_5 I_5 \doteq 18{,}88$ V. Napětí na svorkách zdroje je $U = U_0 - R_\mathrm{i} I \doteq 25{,}6$ V. Celkový odpor sítě je $R = \frac{U_0}{I} - R_\mathrm{i} \doteq 29\ \Omega$.

4 body

Poznámka: soustavu rovnic lze řešit různými způsoby, pro úplnost kontroly uvedeme ještě další proudy: $I_1 = \frac{78}{143}$ A, $I_2 = \frac{48}{143}$ A, $I_3 = -\frac{6}{143}$ A, $I_4 = \frac{72}{143}$ A.

c) Řešení metodou smyčkových proudů provedeme podle obr. R8:

$$\begin{aligned} R_1(I_b - I_a) + R_4(I_b - I_c) + R_i I_b - U_0 &= 0 \\ R_3(I_c - I_a) + R_5 I_c + R_4(I_c - I_b) &= 0 \\ R_2 I_a + R_3(I_a - I_c) + R_1(I_a - I_b) &= 0 \end{aligned}$$



Obr. R8

Po dosazení konkrétních hodnot odporů rezistorů dostaneme

$$\begin{aligned} -10I_a + 55I_b - 40I_c - 30 &= 0 \\ -30I_a - 40I_b + 120I_c &= 0 \\ 60I_a - 10I_b - 30I_c &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme:
$I_a = \frac{48}{143}$ A, $I_b = \frac{126}{143}$ A, $I_c = \frac{54}{143}$ A.
Potom $I = I_b = \frac{126}{143}$ A $\doteq 0{,}88$ A,

$I_5 = I_c = \frac{54}{143}$ A, $U_5 = R_5 I_5 \doteq 18{,}88$ V.

3 body