Řešení úloh 1. kola 44. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 4, 6, 7), M. Jarešová (2, 3) a D. Kluvanec (5)

1. a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v ústí hadice. Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

plynou pro dobu letu vody a pro výšku místa dopadu na stěnu vztahy

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}\,, \qquad h = d \operatorname{tg}\alpha - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = d \operatorname{tg}\alpha - \frac{g d^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\,. \qquad (1)$$

Extrém funkce $h = h(\alpha)$ určíme užitím diferenciálního počtu:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha} - \frac{g d^2 \sin\alpha}{v_0^2 \cos^3\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gd}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right) \begin{cases} = 0 \text{ pro } \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_0^2}{gd} \\ < 0 \text{ pro } \operatorname{tg}\alpha > \dfrac{v_0^2}{gd} \\ > 0 \text{ pro } \operatorname{tg}\alpha < \dfrac{v_0^2}{gd} \end{cases}$$

Pro elevační úhel $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{v_0^2}{gd}$ dosáhne tedy funkce $h(\alpha)$ maxima. Pro dané hodnoty $\alpha = 66{,}4°$. **4 body**

b) Dosazením výsledku úlohy a) do (1) dostaneme

$$h = \frac{d v_0^2}{gd} - \frac{g d^2}{2 v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 d^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g d^2}{2 v_0^2} = 9{,}29\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

c) Odchylku φ rychlosti dopadu od vodorovného směru určíme ze vztahu

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gd}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Z toho plyne $\varphi = -(90° - \alpha) = -23{,}6°$. **4 body**

Jiné řešení úloh a,b): Aby voda dopadla na stěnu do výšky h, musí $\operatorname{tg}\alpha$ splňovat kvadratickou rovnici získanou úpravou (1):

$$\frac{g d^2}{2 v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - d \operatorname{tg}\alpha + h + \frac{g d^2}{2 v_0^2} = 0\,.$$

Z toho

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d \pm \sqrt{D}}{\frac{gd^2}{v_0^2}}\,, \quad \text{kde} \quad D = d^2 - \frac{4hgd^2}{2v_0^2} - \frac{4g^2d^4}{4v_0^4}$$

je diskriminant. Rovnice má řešení, jestliže

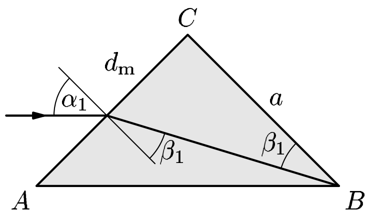
$$D \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}\,.$$

Největší výšky dosáhneme, když $D = 0$. Pak

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{d \pm 0}{\frac{gd^2}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gd}\,.$$

Poznámka: Ještě jednodušší řešení dostaneme užitím *ochranné paraboly* – viz studijní text *Vrhy*, knihovnička FO č. 56.

2. a)



Obr. R1

Paprsek v krajním případě dopadne do bodu B (obr. R1). Pak

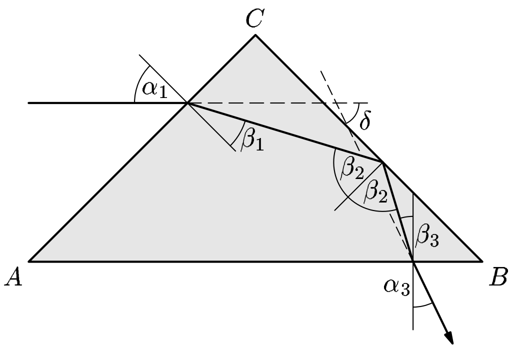
$$d = d_\mathrm{m} = a\operatorname{tg}\beta_1\,, \qquad \sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}\,,$$

$$\beta_1 = 28,13^\circ\,, \qquad d_\mathrm{m} = 0{,}534a\,.$$

Vyhovují paprsky, pro které $d < d_\mathrm{m}$.

2 body

b) Paprsek dopadá na rozhraní BC pod úhlem $\beta_2 = 90^\circ - \beta_1 = 61{,}87^\circ$, který je větší než mezní úhel $\beta_\mathrm{m} = \arcsin(1/n) = 41{,}81^\circ$. Nastane tedy úplný odraz a paprsek dopadá na rozhraní AB pod úhlem $\beta_3 = \beta_2 - 45^\circ = 16{,}87^\circ$, láme se a vystupuje z hranolu pod úhlem $\alpha_3 = \arcsin(n\sin\beta_3) = 25{,}81^\circ$ (obr. R2). Vystupující paprsek je od původního směru odchýlen o $\delta = 90^\circ - \alpha_3 = 64{,}19^\circ$. **3 body**



Obr. R2

c,d) Vyřešíme nejprve podle obr. R3 obecnější úlohu d). Platí

$$\beta_1 < \beta_m \,, \qquad \beta_2 = 90^\circ - \beta_1 > 48{,}09^\circ > \beta_\mathrm{m} \,.$$

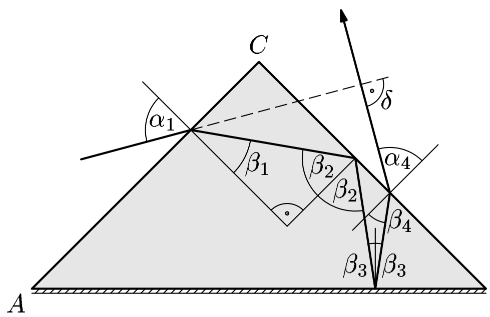
Na rozhraní BC určitě dojde k úplnému odrazu a paprsek dopadá na odraznou plochu AB pod úhlem $\beta_3 = \beta_2 - 45^\circ$. Pod stejným úhlem se odráží a vrací se na rozhraní BC, kam dopadá pod úhlem

$$\beta_4 = 45^\circ - \beta_3 = 45^\circ - (\beta_2 - 45^\circ) = 90^\circ - \beta_2 = \beta_1 \,.$$

Z hranolu tedy vystupuje pod úhlem $\alpha_4 = \alpha_1$ a protože stěny AC a BC jsou navzájem kolmé, je vystupující paprsek kolmý k původnímu směru před dopadem na hranol.

Paprsek přicházející na hranol rovnoběžně s přeponou AB vystupuje z hranolu kolmo k přeponě.

5 bodů



Obr. R3

3. a) K určení periody harmonických kmitů musíme vypočítat moment setrvačnosti kotouče J a direkční moment D (k tomu je třeba určit těžiště kruhové výseče). Moment setrvačnosti válce je $J = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\varrho h\pi r^4$, kde h je výška válce. Výseče mají momenty setrvačnosti:

$$J_1 = \frac{1}{2}\varrho_1 h\pi r^4 \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2}\varrho_1 hr^4\alpha. \qquad J_2 = \frac{1}{2}\varrho_2 h\pi r^4 \frac{2\pi - 2\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2}\varrho_1 hr^4(\pi - \alpha).$$

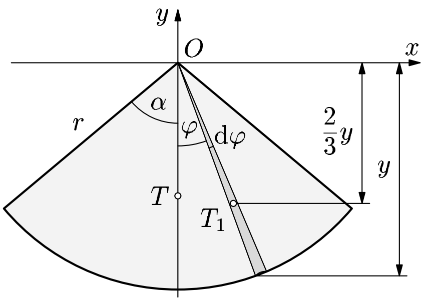
Moment setrvačnosti kotouče $J = J_1 + J_2 = \frac{1}{2}hr^4[\varrho_1\alpha + \varrho_2(\pi - \alpha)]$.

Vztah pro výpočet polohy těžiště kruhové výseče odvodíme z obr. R4:

$$y_{\mathrm{T}} = \int\limits_S \frac{\mathrm{d}S \cdot \frac{2}{3}y}{S} =$$

$$= \int \frac{\frac{\pi r^2\,\mathrm{d}\varphi}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}r\cos\varphi\right)}{\pi r^2\alpha} =$$

$$= -\frac{r}{3\alpha}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{2}{3}\cdot\frac{r\sin\alpha}{\alpha}.$$



Obr. R4

Poznámka: Tento vzorec není nutno odvozovat, lze ho též nalézt v tabulkách.

První výseč: $y_{\mathrm{T1}} = -\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}r$. Druhá výseč: $y_{\mathrm{T2}} = \frac{2}{3}\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\pi - \alpha}r = \frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\pi - \alpha}r$.

Direkční moment: $D = m_1 g|y_{\mathrm{T1}}| - m_2 g y_{\mathrm{T2}}$,

$$D = \frac{\pi r^2 2\alpha}{2\pi}h\varrho_1 g\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}r - \frac{\pi r^2(2\pi - 2\alpha)}{2\pi}h\varrho_2 g\frac{2\sin\alpha}{3(\pi - \alpha)}r = \frac{2}{3}r^3 hg(\varrho_1 - \varrho_2)\sin\alpha.$$

Doba kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{g}\frac{\varrho_1\alpha + \varrho_2(\pi - \alpha)}{(\varrho_1 - \varrho_2)\sin\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{g}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\pi}{\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1\right)\sin\alpha}\right)}.$$

Označme $\xi = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1$, pak $T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{g}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\pi}{\xi\sin\alpha}\right)}$.

5 bodů

b) Aby bylo T minimální, musí být minimální výraz pod odmocninou, tj. budeme hledat minimum funkce $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\pi}{\xi\sin\alpha}$:

$$\frac{\mathrm{d}f(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\pi}{\xi\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\pi}{\xi}\cos\alpha\right) = 0\,,$$

$$\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\pi}{\xi}\cos\alpha = 0\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha - \alpha - \frac{\pi}{\xi} = 0\,,$$

což je transcendentní rovnice, kterou vyřešíme pouze pro dané hodnoty:

$$\xi = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1 = \frac{17}{9}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha - \alpha = \frac{9\pi}{17}.$$

Pomocí numerických metod nebo graficky dostaneme

$$\alpha = 1{,}24\ \mathrm{rad} = 71^\circ. \quad \text{Potom je} \quad \alpha_1 = 2\alpha = 142^\circ, \quad \alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 = 218^\circ\,.$$

O tom, že se jedná o lokální minimum, se přesvědčíme pomocí druhé derivace funkce $f(\alpha)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\pi}{\xi}\cos\alpha\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\alpha + \frac{\pi}{\xi}\right) - \frac{2\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\pi}{\xi}\cos\alpha\right).$$

Pro $\alpha = 1{,}24$ rad je $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2} = 4{,}63 > 0$; nastává lokální minimum.

Dosazením zjištěné hodnoty úhlu α do vztahu pro výpočet periody dostaneme $T_{\min} \doteq 1{,}9$ s.

5 bodů

4. a) Zákon zachování energie:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{1}$$

Zákon zachování hybnosti:

$$m_1v = m_1v_1\cos\vartheta + m_2v_2\cos\varphi \tag{2}$$

$$0 = m_1v_1\sin\vartheta - m_2v_2\sin\varphi \tag{3}$$

3 body

b) Upravíme (2) a (3):

$$m_2v_2\cos\varphi = m_1v - m_1v_1\cos\vartheta \tag{4}$$

$$m_2v_2\sin\varphi = m_1v_1\sin\vartheta \tag{5}$$

Sečtením $(4)^2 + (5)^2$ dostaneme

$$m_1^2v^2 - 2m_1^2v_1v\cos\vartheta + m_1^2v_1^2 = m_2^2v_2^2\,. \tag{6}$$

Z (1) vyjádříme $v_2^2 = \frac{m_1}{m_2}v^2 - \frac{m_1}{m_2}v_1^2$, dosadíme do (6). Po úpravě dostaneme:

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1v\cos\vartheta \cdot v_1 + (m_1 - m_2)v^2 = 0\,. \tag{7}$$

3 body

c) Dostali jsme kvadratickou rovnici, ze které můžeme vypočítat v_1 při známé odchylce ϑ. Úloha má řešení, je-li diskriminant rovnice nezáporný:

$$D = 4m_1^2v^2\cos^2\vartheta - 4(m_1 + m_2)(m_1 - m_2)v^2 \geq 0\,, \qquad m_1^2\cos^2\vartheta - m_1^2 + m_2^2 \geq 0\,,$$

$$\cos^2\vartheta \geq 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\,, \qquad \sin^2\vartheta \leq \frac{m_2^2}{m_1^2}\,.$$

Maximální odchylka částice α od původního směru je

$$\vartheta_{\max} = \arcsin\frac{m_2}{m_1} \doteq \arcsin 0{,}25 = 14{,}5^\circ\,.$$

4 body

5. a) Nejprve určíme počet N atomů izotopu ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ v jednom gramu uhlíku v živých organismech. Jeho aktivita je

$$A = \frac{15{,}3}{60}\ \mathrm{Bq} = 0,255\ \mathrm{Bq} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N\,,$$

kde λ je přeměnová konstanta a T je poločas přeměny. Po úpravě

$$N = \frac{AT}{\ln 2} = \frac{0{,}255\ \mathrm{Bq} \cdot 3{,}16 \cdot 10^{7} \cdot 5730\ \mathrm{s}}{\ln 2} = 6{,}66 \cdot 10^{10}\,.$$

3 body

Celkový počet atomů v jednom gramu uhlíku je

$$N_c = \frac{m}{A_r m_u} = \frac{10^{-3}\ \mathrm{kg}}{12{,}011 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 5{,}02 \cdot 10^{22}\,.$$

Na jeden atom ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ připadá $\frac{N_c}{N} = 7{,}54 \cdot 10^{11}$ atomů stabilních izotopů uhlíku.

2 body

b) Rostliny přijímají radiouhlík ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ z atmosféry při asimilaci CO_2. Do těl živočichů se dostává s potravou. V atmosféře vzniká radiouhlík vlivem kosmického záření a jeho koncentrace je stálá. V odumřelých organismech se radiouhlík neobnovuje a jeho koncentrace se v důsledku radioaktivního rozpadu zmenšuje.

1 bod

c) Od doby, kdy byl len na výrobu plátna sklizen a zpracován, uplynulo přibližně 1900 let. Během této doby poklesla aktivita radiouhlíku v plátně v poměru

$$\frac{A}{A_0} = 2^{-\frac{t}{T}} = 2^{-\frac{1900}{5730}} \doteq 0,79\,.$$

2 body

d) Předpokládáme, že počáteční aktivita A_0 jednoho gramu uhlíku ve zkoumaném předmětu byla stejná jako u dnešních živých organismů. Dnešní aktivita je

$$A = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}\,.$$

Úpravou dostaneme

$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{A_0}{A} = 3750\ \mathrm{r}\,.$$

2 body

7. a) Pro adiabatický děj 1 – 2 platí:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}\,,\qquad p_1V_1^{\varkappa}=p_2V_2^{\varkappa}\,,\qquad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}=\varepsilon^{\varkappa-1}\,,$$

$$\boxed{T_2=T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\,,\qquad p_2=p_1\varepsilon^{\varkappa}\,.}$$

Pro izobarický děj 2–3 platí: $\dfrac{T_3}{T_2}=\dfrac{V_3}{V_2}=\varphi\,,$

$$\boxed{T_3=T_2\varphi=T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\varphi\,,\qquad p_3=p_2=p_1\varepsilon^{\varkappa}\,.}$$

Pro adiabatický děj 3–4 platí:

$$p_3V_3^{\varkappa}=p_4V_4^{\varkappa}\,,\qquad \frac{T_4}{T_3}=\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\varkappa-1}=\left(\frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1}=\varphi^{\varkappa-1}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}}\,,$$

$$T_4=T_3\varphi^{\varkappa-1}\varepsilon^{1-\varkappa}=T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\varphi\cdot\varepsilon^{1-\varkappa}\varphi^{\varkappa-1}\,,\qquad \boxed{T_4=T_1\varphi^{\varkappa}\,,}$$

$$p_4=p_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\varkappa}=p_3\left(\frac{V_3}{V_2}\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa}=p_1\varepsilon^{\varkappa}\varphi^{\varkappa}\varepsilon^{-\varkappa}\,,\qquad \boxed{p_4=p_1\varphi^{\varkappa}\,.}$$

Pro dané hodnoty:
$T_1=300$ K, $T_2=953$ K, $T_3=2383$ K, $T_4=1082$ K,
($t_1=27$ °C, $t_2=680$ °C, $t_3=2110$ °C, $t_4=809$ °C),
$p_1=0{,}100$ MPa, $p_2=p_3=5{,}72$ MPa, $p_4=0{,}361$ MPa. **3 body**

b) Hmotnost vzduchu, který projde pracovním prostorem válce během jednoho cyklu, můžeme vyjádřit pomocí stavové rovnice:

$$m=\frac{p_1V_1M_m}{RT_1}\,.\quad \text{Z toho plyne:}\ \ mc_V=2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}\,.$$

Během hoření paliva při ději 2–3 přijme pracovní látka teplo

$$Q_1=mc_p(T_3-T_2)=m\varkappa c_V(T_3-T_2)=2{,}5\varkappa\frac{p_1V_1}{T_1}(T_3-T_2)\,.$$

Při izochorickém ději 4–1 odevzdá pracovní látka teplo

$$Q_2{}'=mc_V(T_4-T_1)=2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}(T_4-T_1)\,.$$

Ostatní děje jsou adiabatické, tedy bez tepelné výměny. Celková práce při jednom cyklu je $W'=Q_1-Q_2'$. Motor pracuje s teoretickou účinností

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2'}{Q_1}=1-\frac{Q_2'}{Q_1}=1-\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}\,.$$

Pro dané hodnoty:
$Q_1=801$ J, $Q_2'=313$ J, $W'=488$ J, $\eta=61$ %. **3 body**

c) Klikový hřídel se otáčí s frekvencí $f = 3000/(60\ \mathrm{s}) = 50\ \mathrm{s}^{-1}$. U čtyřválcového motoru připadají na dvě otočení klikového hřídele 4 celé cykly. Výkon motoru je

$$P = 2fW' = 49\ \mathrm{kW}\,.$$

2 body

d) Do vztahu pro účinnost odvozeného v úloze b) dosadíme vztahy mezi teplotami odvozené v části a):

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\dfrac{T_4}{T_1} - 1}{\dfrac{T_3}{T_1} - \dfrac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa} - 1}{\varepsilon^{\varkappa - 1}\varphi - \varepsilon^{\varkappa - 1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa - 1}} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa} - 1}{\varphi - 1}\,,$$

což jsme měli dokázat. **2 body**