Řešení úloh 1. kola 44. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: I. Volf (1), Čepl (2), J. Jírů (3 až 7)

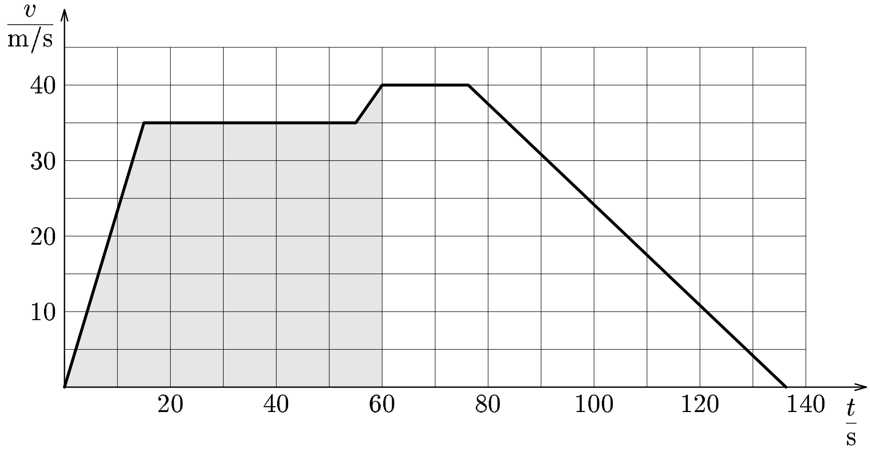
1. Celý okruh rozdělíme na pět úseků podle charakteru pohybu motocyklisty. Zavedeme označení: $t_1 = 15$ s, $t_2 = 40$ s, $t_3 = 5$ s, $t_5 = 60$ s, $v_1 = 126 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2 = 144 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $m = 240$ kg.

a) Pohyb motocyklu je rovnoměrně zrychlený v prvním a třetím úseku a rovnoměrně zpomalený v posledním pátém úseku. Velikosti zrychlení jsou:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = 2{,}33 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, \quad a_3 = \frac{v_2 - v_1}{t_3} = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, a_5 = \frac{v_2}{t_5} = 0{,}67 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

2 body

b)



2 body

c) Graf lze přímo ze zadání sestrojit v prvních třech úsecích. Z obsahu plochy pod touto částí grafu určíme délku poloviny okruhu:

$$\frac{d}{2} = \left(\frac{1}{2}\cdot 35\cdot 15 + 35\cdot 40 + \frac{35+40}{2}\cdot 5\right) \text{ m} = 1850 \text{ m}.$$

2 body

Poslední úsek okruhu měl délku $s_5 = \frac{v_2 t_5}{2} = \frac{40\cdot 60}{2} = 1200 \text{ m}$.

Předposlední úsek v délce $s_4 = d/2 - s_5 = 650$ m projede motocykl za dobu $t_4 = s_4/v_2 = 16{,}25$ s. Celková doba jízdy je

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 136{,}25 \; s \doteq 136 \text{ s}.$$

Průměrná rychlost celého pohybu je

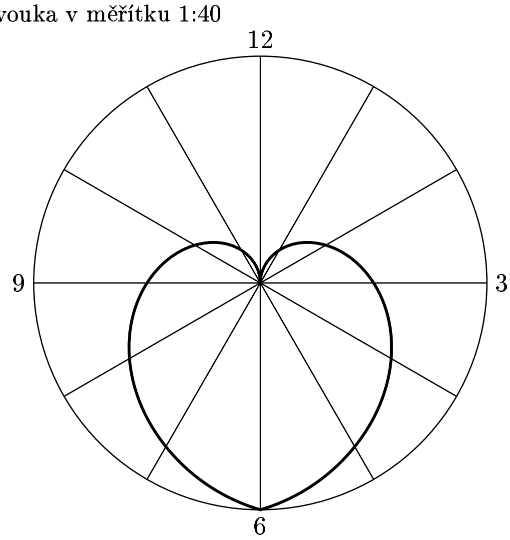
$$v_\text{p} = \frac{d}{t} = 27{,}16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 97{,}8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

2 body

d) Maximální pohybová síla působí na prvním úseku, kde je největší zrychlení. Její směr je totožný se směrem pohybu.

$$F_{\max} = ma_1 = 560\ \mathrm{N}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

2. a) Trajektorie pavouka v měřítku 1:40



2 body

b) Platí
$$v_1 = \frac{2l}{T} = 0{,}67\ \mathrm{mm}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

c) Vzdálenost pavouka od středu ciferníku v čase $t \in (0, T/2)$ je $x = v_1 t = \dfrac{2lt}{T}$.
Výsledná rychlost $\boldsymbol{v}$ pavouka vzhledem k ciferníku je vektorovým součtem rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ pavouka vzhledem k rafii a k ní kolmé rychlosti $\boldsymbol{v}_2$ bodu rafie, ve kterém se pavouk právě nachází, vzhledem k ciferníku. Platí:

$$v_2 = \omega x = \frac{2\pi x}{T} = \frac{4\pi l t}{T^2}\,,$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(\frac{2l}{T}\right)^2 + \left(\frac{4\pi l t}{T^2}\right)^2} = \frac{2l}{T}\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 t^2}{T^2}}\,. \qquad \textbf{3 body}$$

d) Rychlost pavouka vzhledem k ciferníku má minimální velikost v čase $t = 0$, tj, ve středu ciferníku.

$$v_{\min} = v_1 = \frac{2l}{T} = 0{,}67\ \mathrm{mm}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

V čase $t = T/2$, kdy se pavouk nachází na konci rafie, je velikost jeho rychlosti maximální.

$$v_{\max} = \frac{2l}{T}\sqrt{1+\pi^2} = v_1\sqrt{1+\pi^2} = 2{,}20\ \mathrm{mm}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

e) Hledaný poměr je $\dfrac{F_s}{F_G} = \dfrac{ml\omega^2}{mg} = \dfrac{4\pi^2 l}{gT^2} = 3{,}73 \cdot 10^{-7}$.
Setrvačná síla je vzhledem k tíhové zanedbatelná. **2 body**

3. Práce vykonaná lokomotivou za dobu t od začátku pohybu je rovna kinetické energii vlaku:

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2 . \qquad (1)$$

a) Z rovnice (1) plyne $v_1 = \sqrt{\dfrac{2Pt_1}{m}} = 5{,}77\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **1 bod**

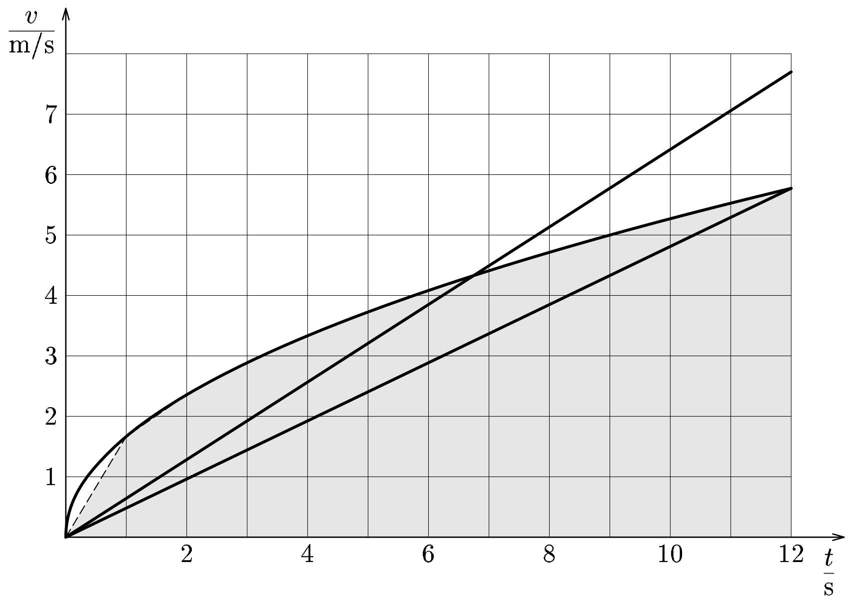
b) Z rovnice (1) plyne $t_2 = \dfrac{mv_2^2}{2P} = 36\ \mathrm{s}$. **1 bod**

c) Hledaná závislost je určena vzorcem $v = \sqrt{\dfrac{2Pt}{m}}$. Sestavíme tabulku:

t/s	0	1	2	3	4	5	6	7
$v/\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	0	1,67	2,36	2,87	3,33	3,73	4,08	4,41

t/s	8	9	10	11	12
$v/\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	4,71	5,00	5,27	5,53	5,77

Graf (včetně úloh e),f)):



3 body

d) Obsah obrazce pod grafem rychlosti můžeme určit více způsoby. Je-li graf sestrojen na milimetrovém papíru, můžeme určit počet příslušných čtverečků. Jinak můžeme časový interval od 0 do 12 s rozdělit např. na 12 úseků a krajní body grafu v každém úseku spojit úsečkou, čímž dostaneme lomenou čáru. Plocha omezená lomenou čarou je tvořena trojúhelníkem a 11 lichoběžníky (lichoběžníková metoda – v grafu vyznačeno vyplněnou plochou). Užitím hodnot z tabulky určíme její obsah a dostaneme přibližně hledanou dráhu $s = 45{,}9$ m.
Poznámka: Pro úplnost lze takto získanou přibližnou hodnotu porovnat s přesnou hodnotou určenou podle vzorce $s = \sqrt{8Pt_1^3/(9m)}$ *odvozeného integrálním počtem. Po zaokrouhlení na 6 platných číslic dostaneme* $s = 46{,}1880$ m.

3 body

e) Hledaná dráha je dána obsahem trojúhelníka omezeného grafem přímé úměrnosti $v = at$ v intervalu 0 až 12 s. Dostaneme

$$s' = \frac{1}{2} \cdot 5{,}77 \cdot 12 \text{ m} = 34{,}6 \text{ m}.$$

1 bod

f) Ze vzorce $s = \frac{1}{2}v't_1$ dostaneme $v' = \frac{2s}{t_1} = 7{,}7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1 bod

4. a) Pohyb lyžaře po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti $a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, po vodorovné rovině rovnoměrně zpomalený se zrychlením o velikosti $a_2 = fg$. K sestrojení grafu je nutné určit časy t_1, t_1', kdy se lyžaři dostanou na konec nakloněné roviny, časy t_2, t_2', kdy zastaví, a maximální rychlosti $v_{\max}$, $v'_{\max}$ na konci nakloněné roviny.
Z obecných vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu

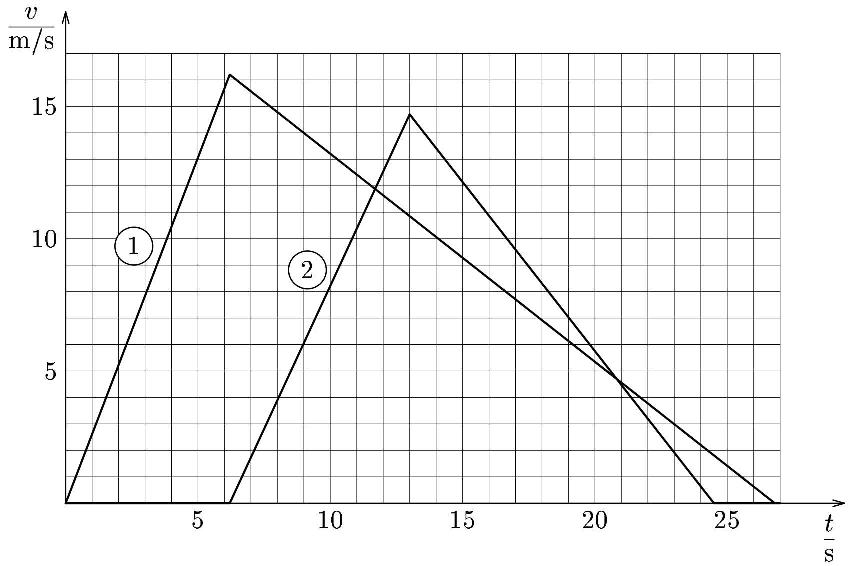
$$s = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at \quad \text{plyne} \qquad v = \sqrt{2as}, \quad t = \frac{v}{a}.$$

V naší úloze

$$v_{\max} = \sqrt{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)l} \doteq 16{,}2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad t_1 = \frac{v_{\max}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \doteq 6{,}2 \text{ s},$$

$$v'_{\max} = \sqrt{2g(\sin\alpha - f'\cos\alpha)l} \doteq 14{,}7 \text{ ms}^{-1}, \quad t_1' = t_1 + \frac{v'_{\max}}{g(\sin\alpha - f'\cos\alpha)} \doteq 13{,}0 \text{ s},$$

$$t_2 = t_1 + \frac{v_{\max}}{fg} \doteq 26{,}8 \text{ s}, \qquad t_2' = t_1' + \frac{v'_{\max}}{f'g} \doteq 24{,}5 \text{ s}.$$



5 bodů

b) 1) Vzdálenost d určíme jako rozdíl obsahů ploch (pravoúhlých trojúhelníků) pod grafy během zastavování:

$$d = \left[\frac{1}{2}16{,}2(26{,}8 - 6{,}2) - \frac{1}{2}14{,}7(24{,}5 - 13)\right] \mathrm{\ m} \doteq 82 \mathrm{\ m}\,.$$

2) Druhý lyžař se přibližoval k prvnímu po dobu, kdy jeho rychlost byla větší, tedy v intervalu $(11{,}7; 20{,}9)$ s.

3) První lyžař se druhému nejrychleji vzdaloval v čase t_1 relativní rychlostí

$$v_{\mathrm{r1}} = v_{\max} \doteq 16{,}2 \mathrm{\ m \cdot s^{-1}}\,.$$

4) Druhý lyžař se k prvnímu nejrychleji přibližoval v čase t_1' relativní rychlostí

$$v_{\mathrm{r2}} = v'_{\max} - 10{,}9 \mathrm{\ m \cdot s^{-1}} \doteq 3{,}8 \mathrm{\ m \cdot s^{-1}}\,.$$

5) Vzdálenost mezi lyžaři bude největší, když poprvé dosáhnou stejné rychlosti. Je tedy určena obsahem plochy mezi grafy v časovém intervalu $(0; 11{,}7)$ s:

$$d_{\max} \doteq \left[50 + \frac{1}{2}16{,}2(11{,}7 - 6{,}2)\right] \mathrm{\ m} \doteq 95 \mathrm{\ m}\,.$$

5 bodů

5. a) Z rovnic $h = \frac{1}{2}gt^2$, $h = v_0 t$, kde t je doba letu, plyne

$$v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 9{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,. \tag{2}$$

2 body

b) Ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2$$

a z rovnice (2) plyne

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{5gh}{2}} = 21{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,. \tag{3}$$

Úhel α, který svírá rychlost dopadu s vodorovným směrem, určíme užitím vztahu $\cos\alpha = \frac{v_0}{v_\mathrm{d}}$ a rovnic (2) a (3):

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,, \qquad \alpha = 63{,}4^\circ\,.$$

4 body

c) Při dopadu pod úhlem 45° je svislá složka rychlosti dopadu v_y rovna počáteční rychlosti v_0'. Platí:

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,, \quad v_y = v_0' = gt\,.$$

Z toho

$$v_0' = \sqrt{2gh} = 19{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,. \tag{4}$$

2 body

d) Z rovnic $h = \frac{1}{2}gt^2$, $d = v_0' t$ a z rovnice (4) plyne

$$d = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2h\,.$$

2 body

7. A. Aleš: $W = 7{,}8$ J.

Tomáš: Rychlost, kterou získala vzduchovka při zpětném rázu, určíme podle zákona zachování hybnosti:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 = \frac{0{,}00054}{3{,}1} \cdot 170 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}030 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} .$$

Kinetická energie vzduchovky pak je

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}1 \cdot 0{,}030^2 \text{ J} = 0{,}0014 \text{ J} .$$

Je tedy zanedbatelná vzhledem ke kinetické energii střely.

3 body

B.a) Chlapec vykonal práci, která je rovna součtu kinetických energií obou loděk:

$$W = E_{k1} + E_{k2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 ,$$

kde rychlost první loďky získáme užitím zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 = m_2 v_2$. Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$W = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 52 \text{ J}.$$

3 body

B.b) Platí:

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2} = \frac{m_1}{m_2} = 1{,}6 .$$

3 body

C. Země má mnohonásobně větší hmotnost než běžné těleso. Proto je je podle výsledku Bb) kinetická energie, kterou získá, naprosto zanedbatelná vzhledem ke kinetické energii tělesa. (Např. pro těleso o hmotnosti 6 kg je tento poměr $1 : 10^{24}$).

1 bod