

Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autoři úloh: J. Houšťek (1), R. Horáková (2, 3, 4)

1. a) Označme t dobu od začátku pohybu do okamžiku, kdy přední konec vlaku májí sloup 2. Podle zadání pak platí

$$s - l = \frac{1}{2}a(t - t_1)^2, \quad s = \frac{1}{2}at^2, \quad s + l = \frac{1}{2}a(t + t_2)^2.$$

Odečtením druhé rovnice od první a třetí dostaneme

$$l = \frac{1}{2}at_1(2t - t_1) = \frac{1}{2}at_2(2t + t_2).$$

Z toho

$$t_1(2t - t_1) = t_2(2t + t_2) \Rightarrow t = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2(t_1 - t_2)},$$

$$l = \frac{1}{2}at_1 \left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 - t_2} - t_1 \right) = \frac{at_1t_2(t_1 + t_2)}{2(t_1 - t_2)},$$

$$a = \frac{2l(t_1 - t_2)}{t_1t_2(t_1 + t_2)} = 7,14 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4 body

- b) Pro v a s platí

$$v = at = \frac{l(t_1^2 + t_2^2)}{t_1t_2(t_1 + t_2)} = 8,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 30,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1},$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{l(t_1^2 + t_2^2)^2}{4t_1t_2(t_1^2 - t_2^2)} = 493 \text{ m}.$$

3 body

- c) Ze vzorce $s = \frac{1}{2}at^2$ plyne $t = \sqrt{2s/a}$, kde t je čas od počátku pohybu do okamžiku, kdy je uražená dráha rovna s . Pro t_3 pak platí

$$\begin{aligned} t_3 &= \sqrt{\frac{2(s+2l)}{a}} - \sqrt{\frac{2(s+l)}{a}} = \\ &= \frac{\sqrt{(t_1^2 + t_2^2)^2 + 8t_1t_2(t_1^2 - t_2^2)} - \sqrt{(t_1^2 + t_2^2)^2 + 4t_1t_2(t_1^2 - t_2^2)}}{2(t_1 - t_2)} = 18,8 \text{ s}. \end{aligned}$$

(Konečný výraz je příliš komplikovaný. Pro numerický výpočet je vhodnější výraz obsahující s a l .)

3 body

2. a) Amplitudy rychlosti a zrychlení jsou

$$v_m = \omega y_m = 2\pi f y_m = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad a_m = \omega^2 y_m = (2\pi f)^2 y_m = 76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

- b) Pro souřadnice okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení platí

$$v = v_m \cos \omega t, \quad a = -a_m \sin \omega t.$$

Je-li $y = \frac{y_m}{2}$, pak $\sin \omega t = \frac{y}{y_m} = \frac{1}{2}$. Při pohybu vzhůru je

$$\omega t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad \cos \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad v = 2,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Při pohybu dolů je

$$\omega t = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad \cos \omega t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad v = -2,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V obou případech $a = -38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3 body

- c) V okamžiku, kdy výchylka poprvé dosáhne $y_m/2$ je

$$\omega t = 2\pi f t = \frac{\pi}{6}, \quad t = \frac{1}{12f} = 0,021 \text{ s}.$$

2 body

- d) Pro tuhost pružiny platí $k = m\omega^2$. Kinetická a potenciální energie soustavy jsou v poměru

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}ky^2} = \frac{\frac{1}{2}m(\omega y_m \cos \omega t)^2}{\frac{1}{2}m\omega^2(y_m \sin \omega t)^2} = \cot^2 \omega t = 3.$$

2 body

3. a) Vzduch přijme teplo

$$Q = P\tau = 500 \text{ J}.$$

1 bod

b) Izobarický děj probíhá při tlaku

$$p = p_0 + \frac{m_z g}{S} = 1,098 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Hmotnost vzduchu určíme ze stavové rovnice:

$$\frac{pV_1}{T_1} = \frac{m}{M_m} R, \quad m = \frac{pSh_1 M_m}{RT_1} = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Platí $Q = mc_p(T_2 - T_1)$. Výsledná teplota je

$$T_2 = T_1 + \frac{Q}{mc_p} = T_1 + \frac{P\tau}{mc_p} = 689 \text{ K}, \quad t_2 = 416 \text{ }^\circ\text{C}.$$

3 body

c) Při izobarickém ději platí

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad \text{Z toho} \quad h_2 = h_1 \frac{T_2}{T_1} = 0,23 \text{ m}.$$

2 body

d) Vzduch vykoná práci

$$W' = p(V_2 - V_1) = pS(h_2 - h_1) = 143 \text{ J}.$$

2 body

e) Změnu vnitřní energie určíme ze vztahu

$$\Delta U = Q - W' = 357 \text{ J}.$$

2 body

4. Na roztání ledu o hmotnosti m se spotřebuje skupenské teplo

$$L_t = ml_t = 13\,360 \text{ J} \doteq 13 \text{ kJ}.$$

2 body

Stejně velké teplo Q za dobu τ projde tyčí. Tepelný výkon je

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{L_t}{\tau} = 22 \text{ W}.$$

2 body

Pro teplo Q , které za dobu τ projde tyčí, platí

$$Q = \frac{\lambda S(t_1 - t_0)\tau}{l}.$$

3 body

Z toho

$$t_1 = t_0 + \frac{Ql}{\lambda S\tau} \doteq 3,0 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C}.$$

3 body