

Řešení úloh regionálního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 4), J. Jírů (2), M. Randa (3)

1. a) Kondenzátor o kapacitě C_1 se nabije na napětí U . Rezistorem projde náboj $Q_1 = C_1 U = 5,0 \text{ mC}$ a kondenzátor získá energii

$$E_{C1} = \frac{1}{2} Q_1 U = \frac{1}{2} C_1 U^2 = 25 \text{ mJ}.$$

Práce zdroje přitom je $W_z = U Q_1 = C_1 U^2 = 50 \text{ mJ}$. V rezistoru se spotřebuje práce

$$W_1 = W_z - E_{C1} = C_1 U^2 - \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = 25 \text{ mJ}.$$

4 body

- b) Náboj na kondenzátoru o kapacitě C_1 se zmenší na $Q_1 - Q_2$. Platí:

$$\frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow Q_2 = Q_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 0,8 Q_1 = 4,0 \text{ mC}.$$

2 body

Napětí na kondenzátorech poklesne na

$$U' = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{C_1} = \frac{Q_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = 2,0 \text{ V}$$

a celková energie soustavy kondenzátorů bude

$$E'_{C1} + E'_{C2} = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U'^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \cdot U^2.$$

Práce W_2 bude rovna úbytku elektrické energie soustavy kondenzátorů:

$$W_2 = E_{C1} - E'_{C1} - E'_{C2} = \frac{1}{2} C_1 U^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U^2 = 20 \text{ mJ}.$$

4 body

Všechny výsledky jsou nezávislé na velikosti odporu R .

2. a) Zvolme hladinu nulové potenciální tíhové energie na hladině vody. Podle zákona zachování energie je potenciální tíhová energie skokana na mostě rovna potenciální energii pružnosti lana v nejnižší poloze skokana:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-l)^2. \quad \text{Z toho} \quad k = \frac{2mgh}{(h-l)^2} = 70 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (1)$$

2 body

- b) Označme Δl prodloužení lana po ustálení. Platí $mg = k\Delta l$. Po dosazením z (1) dostaneme

$$\Delta l = \frac{(h-l)^2}{2h}. \quad (2)$$

Po ustálení se skokan bude nacházet ve výšce

$$h_1 = h - (l + \Delta l) = \frac{2h^2 - 2hl - (h-l)^2}{2h} = \frac{h^2 - l^2}{2h} = 19 \text{ m} \quad (3)$$

2 body

- c) Rychlost je maximální v okamžiku, kdy výslednice tíhové síly a síly pružného lana je nulová, tedy ve výšce h_1 , kde prodloužení lana je Δl . Z rovnosti potenciální energie skokana na mostě a jeho celkové mechanické energie ve výšce h_1 nad hladinou dostaneme rovnici

$$mgh - mgh_1 = mg(l + \Delta l) = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2,$$

z níž užitím vztahů (1) a (2) získáme hledanou maximální rychlost

$$v_m = (h+l)\sqrt{\frac{g}{2h}} = 17,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výsledek lze též dostat z rovnice pro harmonické kmity

$$v_m = y_m\omega = h_1\sqrt{\frac{k}{m}}$$

užitím vztahů (1) a (3).

3 body

- d) Zpomalený pohyb z výšky h_1 na hladinu představuje čtvrtperiodu harmonického pohybu s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$ a s maximální výchylkou h_1 . Velikost zrychlení pohybu je největší při maximální výchylce, tedy v nejnižší poloze skokana: $a_m = \omega^2 h_1$. V neinerciální vztažné soustavě spojené se skokanem na něj působí tíhová síla ve směru dolů a setrvačná síla proti směru okamžitého zrychlení soustavy. V uvažované nejnižší poloze setrvačná síla směřuje rovněž dolů. Přetížení je

$$\frac{mg + ma_m}{m} = \frac{k}{m}h_1 + g = \frac{2gh}{(h-l)^2} \cdot \frac{h^2 - l^2}{2h} + g = \frac{h+l}{h-l}g + g = \frac{2h}{h-l}g = \frac{8}{3}g.$$

3 body

3. a) Celková práce je v obou případech stejná a je rovna obsahu plochy v p - V diagramu:

$$W'_{1231} = W'_{1341} = \frac{1}{2}V_1 \cdot 2p_1 = p_1 V_1, \quad W'_{1231} : W'_{1341} = 1.$$

1 bod

b) Určíme teploty ve stavech 1, 2, 3, 4:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}, \quad T_2 = 3T_1, \quad T_3 = 6T_1, \quad T_4 = 2T_1.$$

Změny vnitřní energie při jednotlivých dějích:

$$\Delta U_{12} = C_V \cdot \Delta T_{12} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}nR \cdot 2T_1 = 3nR \cdot \frac{p_1 V_1}{nR} = 3p_1 V_1,$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}nR \cdot 3T_1 = \frac{9}{2}p_1 V_1, \quad \Delta U_{31} = \frac{3}{2}nR \cdot (-5T_1) = -\frac{15}{2}p_1 V_1,$$

$$\Delta U_{13} = \frac{15}{2}p_1 V_1, \quad \Delta U_{34} = -6p_1 V_1, \quad \Delta U_{41} = -\frac{3}{2}p_1 V_1.$$

V cyklu 1231 je teplo dodáváno při dějích 12 a 23:

$$Q_{1231} = \Delta U_{12} + W'_{12} + \Delta U_{23} + W'_{23} = 3p_1 V_1 + 0 + \frac{9}{2}p_1 V_1 + 3p_1 V_1 = \frac{21}{2}p_1 V_1.$$

V cyklu 1341 je teplo dodáváno jen při ději 13:

$$Q_{1341} = \Delta U_{13} + W'_{13} = \frac{15}{2}p_1 V_1 + 2p_1 V_1 = \frac{19}{2}p_1 V_1.$$

$$\text{Tepla jsou v poměru } \frac{Q_{1231}}{Q_{1341}} = \frac{21}{19}.$$

3 body

$$\text{c) Účinnost cyklu 1231 je } \eta_{1231} = \frac{W_{1231}}{Q_{1231}} = \frac{p_1 V_1}{\frac{21}{2}p_1 V_1} = \frac{2}{21}.$$

$$\text{Účinnost cyklu 1341 je } \eta_{1341} = \frac{W_{1341}}{Q_{1341}} = \frac{p_1 V_1}{\frac{19}{2}p_1 V_1} = \frac{2}{19}.$$

$$\text{Účinnosti jsou v poměru } \frac{\eta_{1231}}{\eta_{1341}} = \frac{19}{21}.$$

2 body

d) Při dějích 23 a 41 je tlak konstantní, při dějích 12 a 34 je tlak přímo úměrný termodynamické teplotě. Závislost tlaku na teplotě je nelineární při ději 13, kde platí

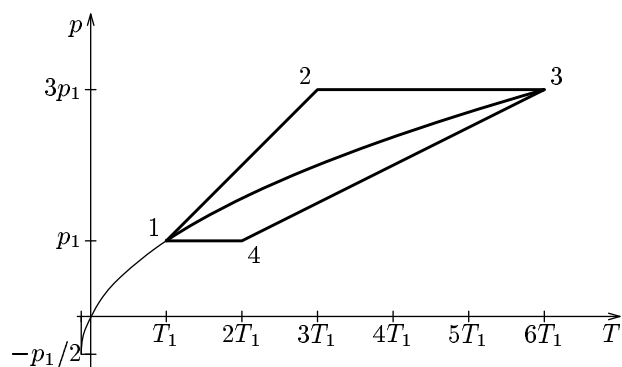
$$\frac{V - V_1}{p - p_1} = \frac{V_1}{2p_1}, \quad V = V_1 + \frac{V_1}{2p_1}(p - p_1),$$

$$nRT = pV = pV_1 + \frac{pV_1}{2p_1}(p - p_1) = \frac{V_1}{2p_1}p^2 + \frac{V_1}{2}p, \quad T = \frac{1}{nR} \left(\frac{V_1}{2p_1}p^2 + \frac{V_1}{2}p \right).$$

Dostali jsme rovnici paraboly, která prochází počátkem grafu a body 1 a 3. Další úpravou dostaneme

$$T = \frac{p_1 V_1}{2nR} \left(\frac{p}{p_1} \right)^2 + \frac{p_1 V_1}{2nR} \frac{p}{p_1} = \frac{T_1}{2} \left(\frac{p}{p_1} \right)^2 + \frac{T_1}{2} \frac{p}{p_1} = \frac{T_1}{2} \left(\frac{p}{p_1} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{T_1}{8}.$$

Vrchol paraboly je v bodě $\left[-\frac{T_1}{8}, -\frac{p_1}{2} \right]$.



4 body

4. a) Přetlak oproti atmosférickému tlaku je vyvolán tíhou zařízení.

$$p = \frac{F_G}{S} = \frac{4mg}{\pi d^2} = 9,75 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Ve válci je tlak $p_1 = p + p_b = 10,75 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1 bod

- b) Vzroste-li teplota z t_1 na t_2 , absolutní teplota z T_1 na T_2 , dojde ve válci k izobaričkému ději. Zvětšení objemu oleje a vzduchu způsobí vysunutí pístu:

$$\left[\frac{\pi D^2}{4}(L - v) - \frac{\pi d^2}{4}l \right] \beta \Delta t + \frac{\pi D^2}{4}v \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{\pi d^2}{4}h,$$

$$h = \frac{D^2(L - v)\beta \Delta t}{d^2} - l\beta \Delta t + \frac{D^2v\Delta t}{d^2T_1} = 0,066 \text{ m} = 6,6 \text{ cm}.$$

4 body

- c) Poklesne-li teplota z t_1 na t_3 , absolutní teplota z T_1 na T_3 , zmenší se objem oleje a zvětší se objem vzduchu:

$$V_1 - V_3 = \frac{\pi D^2}{4}(v' - v) = \left[\frac{\pi D^2(L - v)}{4} - \frac{\pi d^2l}{4} \right] \beta(t_1 - t_3),$$

$$v' = v + \left(L - v - \frac{d^2l}{D^2} \right) \beta(t_1 - t_3) = 0,00837 \text{ m} = 8,37 \text{ mm}.$$

Ze stavové rovnice $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$ dostaneme

$$p_3 = \frac{p_1 T_3 V_1}{T_1 V_3} = \frac{p_1 T_3 v}{T_1 v'} = 1,73 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Přetlak ve válci poklesne na $p'p_3 - p_b = 0,73 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

4 body

- d) V důsledku zvýšení teploty z t_1 na t_2 se poněkud zvětší i objem ocelového válce a vysunutí pístu z válce bude menší, než jsme předpokládali v b). Teplotní součinitel objemové roztažnosti oceli je $3\alpha = 36 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, což je asi 5 % teplotního součinitele objemové roztažnosti oleje β . Proto výška h , do které válec vystoupí, bude asi o 5 % menší, než jsme vypočítali v části b).

1 bod