

Řešení úloh regionálního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: J. Jírů (1), M. Jarešová (2, 3) a B. Vybíral (4)

1. a) Pro úseky s rovnoměrným pohybem platí rovnice

$$s_1 - s_0 = v_m(t_1 - t_0), \quad s_2 - s_0 = v_m(t_2 - t_0). \quad (1)$$

Maximální rychlost je

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = 11,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2)$$

2 body

- b) Při rozbíhání z klidu se stálým výkonem působící síly platí:

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{2Pt_0}{m}}. \quad (3)$$

Integrací dostaneme:

$$s_0 = \int_0^{t_0} v \, dt = \int_0^{t_0} \sqrt{\frac{2Pt}{m}} \, dt = \sqrt{\frac{8P}{9m}} t_0^{\frac{3}{2}}. \quad (4)$$

Z rovnic (2), (3) a (4) plyne

$$s_0 = \frac{2}{3}v_m t_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} t_0. \quad (5)$$

Dosazením do (1) a úpravou dostaneme:

$$s_1 - \frac{2}{3}v_m t_0 = v_m t_1 - v_m t_0, \quad \frac{1}{3}v_m t_0 = v_m t_1 - s_1,$$

$$t_0 = 3 \left(t_1 - \frac{s_1}{v_m} \right) = 3 \frac{(s_2 - s_1)t_1 - s_1(t_2 - t_1)}{s_2 - s_1} = 3 \frac{s_2 t_1 - s_1 t_2}{s_2 - s_1} = 3,75 \text{ s}. \quad (6)$$

Dosazením z (6) do (5) dostaneme:

$$s_0 = 2 \frac{s_2 t_1 - s_1 t_2}{t_2 - t_1} = 28,7 \text{ m}.$$

Z (3) plyne:

$$P = \frac{mv_m^2}{2t_0} = \frac{m(s_2 - s_1)^3}{6(t_2 - t_1)^2(s_2 t_1 - s_1 t_2)} = 1320 \text{ W}.$$

6 bodů

- c) Okamžité zrychlení je $a = \frac{F}{m} = \frac{P}{mv}$. Na konci zrychleného úseku dostaneme:

$$a_0 = \frac{P}{mv_m} = \frac{(s_2 - s_1)^2}{6(t_2 - t_1)(s_2 t_1 - s_1 t_2)} = 1,53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

2. a) 1. Platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{\varrho r \varphi}{S}} + \frac{1}{\frac{\varrho(2\pi - \varphi)r}{S}},$

po úpravě

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{\varrho r} \left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\pi - \varphi} \right), \quad R = \frac{\varrho r}{S} \frac{\varphi(2\pi - \varphi)}{2\pi}.$$

2 body

2. Určíme lokální extrémy funkce $R = R(\varphi)$.

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{\varrho r}{\pi S} (\pi - \varphi) = 0, \quad \text{z čehož} \quad \varphi = \pi.$$

$$\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = -\frac{\varrho r}{\pi S} < 0. \text{ Pro úhel } \varphi = \pi \text{ nastává lokální maximum.}$$

$$\text{Potom } R_{\max} = \frac{\varrho \pi r}{2S}.$$

2 body

b) 1. Pro obecný úhel α je

$$R_1 = \varrho_1 \frac{(\pi - \alpha)r}{S} + \varrho_2 \frac{\alpha r}{S}, \quad R_2 = \varrho_1 \frac{\alpha r}{S} + \varrho_2 \frac{(\pi - \alpha)r}{S}.$$

Potom

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{r} \left[\frac{1}{\alpha_1(\pi - \alpha) + \varrho_2 \alpha} + \frac{1}{\varrho_1 \alpha + \varrho_2(\pi - \alpha)} \right].$$

Po úpravě

$$R = \frac{r}{S} \frac{[(\varrho_2 - \varrho_1)\alpha + \pi \varrho_1][(\varrho_1 - \varrho_2)\alpha + \pi \varrho_2]}{\pi(\varrho_1 + \varrho_2)}.$$

3 body

2. Nyní určíme lokální extrémy této funkce:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\alpha} &= \frac{r}{S\pi(\varrho_1 + \varrho_2)} (\varrho_2 - \varrho_1)[(\varrho_1 - \varrho_2)\alpha + \pi \varrho_2] + (\varrho_1 - \varrho_2)[(\varrho_2 - \varrho_1)\alpha + \pi \varrho_1] = \\ &= \frac{r(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{S\pi(\varrho_1 + \varrho_2)} [\pi - 2\alpha]. \end{aligned}$$

Z podmínky $\frac{dR}{d\alpha} = 0$ dostaneme $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Druhá derivace: $\frac{d^2 R}{d\alpha^2} = \frac{-4r(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{S\pi(\varrho_1 + \varrho_2)} < 0$, nastává lokální maximum.

$$\text{Potom } R_{\max} = \frac{\pi r}{4S} (\varrho_1 + \varrho_2).$$

3 body

3. a) Pro osvětlení platí $E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$.

Užitím sinové věty dostaneme

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{h}{R} \sin \beta, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \beta}.$$

Dále platí

$$\frac{r}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{R}{\sin \beta} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sin \beta} \sin(\alpha + \beta).$$

Použitím součtového vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a dosazením výše uvedených vztahů pro $\sin \alpha$ a $\sin \beta$ dostaneme

$$r = \frac{R}{\sin \beta} \left(\frac{h}{R} \sin \beta \cos \beta + \sin \beta \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \beta} \right) = h \cos \beta + \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \beta}.$$

Po dosazení do vztahu pro E dostaneme

$$E = \frac{I \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \beta}}{R \left(h \cos \beta + \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \beta} \right)^2}.$$

5 bodů

- b) Je-li $h = R$, pak

$$E = \frac{IR \sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{R \left(R \cos \beta + R \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \right)^2} = \frac{I}{4R^2 \cos \beta}.$$

Nejmenší osvětlení je pro $\beta = 0$, tj. $E_{\min} = \frac{I}{4R^2} = 50 \text{ lx}$.

Největší osvětlení je pro $\beta_{\max} = 45^\circ$, tj. $E_{\max} = \frac{I\sqrt{2}}{4R^2} = 70,7 \text{ lx}$.

2 body

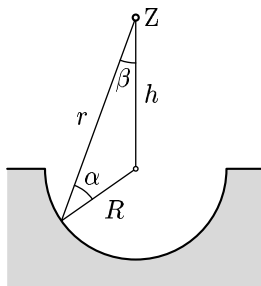
- c) Střední hodnota osvětlení $E_s = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{4R^2} + \frac{I\sqrt{2}}{4R^2} \right) = \frac{I}{4R^2 \cos \beta}$, z čehož
 $\cos \beta = 2(\sqrt{2} - 1), \quad \beta \doteq 34^\circ$.

2 body

- d) Má-li být osvětlení rovnoměrné, musí být zdroj umístěn ve středu kulové plochy.

Osvětlení plochy je pak $E_R = \frac{I}{R^2} = 200 \text{ lx}$.

1 bod



Obr. R1

4. a) Na bublinku působí vztlaková síla a odporová síla podle Stokesova vztahu. Pohybová rovnice bublinky (směr vzhůru volíme jako kladný) je

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_p \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho - \varrho_p)g - 6\pi\eta r v. \quad (1)$$

Přepíšeme ji do tvaru

$$\frac{dv}{dt} = a - bv, \quad \text{kde} \quad a = \left(\frac{\varrho}{\varrho_p} - 1\right)g, \quad b = \frac{9\eta}{2r^2\varrho_p} \quad \text{jsou konstanty.} \quad (2)$$

Separujeme proměnné a integrujeme v mezích daných počátečními podmínkami:

$$\int_0^t dt = t = \int_0^v \frac{dv}{a - bv} = -\frac{1}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{a - bv} = -\frac{1}{b} \ln \left(1 - \frac{b}{a}v\right).$$

Z toho rychlost

$$v = \frac{a}{b} (1 - e^{-bt}) = \left(\frac{\varrho}{\varrho_p} - 1\right) \frac{2r^2 g \varrho_p}{9\eta} \left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2 \varrho_p} t\right)\right],$$

$$v \approx \frac{2r^2 g \varrho}{9\eta} \left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2 \varrho_p} t\right)\right]. \quad (3)$$

4 body

- b) Mezní rychlost dostaneme z (3) pro $t \rightarrow \infty$, nebo přímo z pohybové rovnice (1) resp. (2) pro mezní případ nulové změny rychlosti (tj. $\frac{dv}{dt} = 0$):

$$v_m = \frac{a}{b} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_p} - 1\right) \frac{2r^2 g \varrho_p}{9\eta} \approx \frac{2r^2 g \varrho}{9\eta} = 0,127 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

- c) Po spojení vznikne bublinka, pro jejíž poloměr platí $r'^3 = 2r^3$, neboli $r' = r\sqrt[3]{2}$. Pak mezní rychlost vzroste na

$$v'_m = \left(\frac{\varrho}{\varrho_p} - 1\right) \frac{2r'^2 g \varrho_p}{9\eta} = v_m \sqrt[3]{4} = 0,202 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

- d) Musí platit

$$1 - \frac{1}{100} = 1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2 \varrho_p} t_1\right), \quad \text{neboli} \quad t_1 = \frac{2r^2 \varrho_p}{9\eta} \ln 100 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

Bublinka dosáhne 99 % mezní rychlosti za prakticky neměřitelnou dobu. To je způsobeno jejím malým poloměrem, který se navíc ve vzorci vyskytuje v druhé mocnině, a malou hustotou plynu v bublince.

2 body