

Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 4) a I. Volf (3)

1. a) Konečná rychlost každého automobilu je

$$v_k = a_1 \Delta t + a_2 \Delta t = (a_1 + a_2) \Delta t = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

- b) Automobil A urazil dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2 + (v_A \Delta t + \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2),$$

kde $v_A = a_1 \Delta t$ je jeho rychlost na konci prvního úseku. Obdobně automobil B urazil dráhu

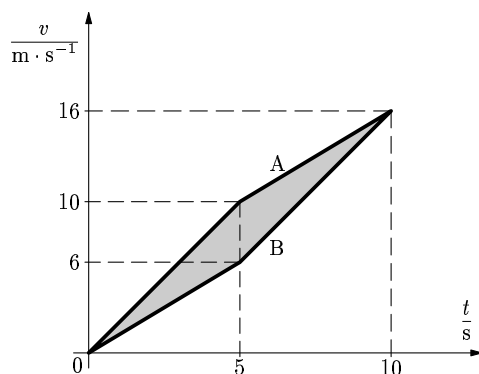
$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2 + (v_B \Delta t + \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2),$$

kde $v_B = a_2 \Delta t$ je jeho rychlost na konci prvního úseku. Hledaná vzdálenost mezi automobily pak je

$$\Delta d = s_1 - s_2 = (a_1 - a_2) (\Delta t)^2 = 20 \text{ m}.$$

3 body

- c) Graf závislosti rychlosti na čase obou automobilů



Vzdálenost automobilů odpovídá obsahu vyšrafovaného rovnoběžníka:

$$\Delta d = 2 \left(\frac{5 \cdot 10}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2} \right) \text{ m},$$

$$\Delta d = 20 \text{ m}.$$

Obr. R1

2 body

- d) Každý automobil dosáhne z klidu za čas $2\Delta t$ konečné rychlosti v_k . Průměrný výkon obou automobilů je proto stejný

$$P_p = \frac{\frac{1}{2} m v_k^2}{2\Delta t} = 15,4 \text{ kW}.$$

Okamžitý výkon $P = Fv = mav$ je při daném zrychlení maximální při největší rychlosti, tj. vždy na konci rovnoměrně zrychleného úseku. Automobil A má při daném číselném zadání maximální výkon na konci 1. úseku $P_{A\max} = 24 \text{ kW}$ (na konci 2. úseku je výkon 23,0 kW); automobil B má maximální výkon na konci 2. úseku $P_{B\max} = 38,4 \text{ kW}$.

3 body

2. a) Označme α sklon nakloněné roviny. Z rovnováhy sil

$$mg \sin \alpha + f mg \cos \alpha = F, \quad F = mg,$$

kde F je velikost tahové síly ve vlákne, plyne po vyloučení F :

$$f = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \frac{h}{l}}{\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}} = \sqrt{\frac{l-h}{l+h}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58.$$

3 body

b) Z pohybových rovnic

$$mg - F = ma, \quad F - mg \sin \alpha = ma \quad (1)$$

po vyloučení velikosti F tahové síly ve vlákne (1) plyne:

$$mg - mg \sin \alpha = 2ma, \\ a = \frac{1 - \sin \alpha}{2} g = \frac{l - h}{2l} g = \frac{1}{4} g = 2,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

c) Velikost tahové síly F určíme ze vztahů (1):

$$F = mg \sin \alpha + ma = mg \frac{1 + \sin \alpha}{2} = mg \frac{l + h}{2l} = 0,75 mg = 1,47 \text{ N}.$$

1 bod

d) Těleso A urazí nejprve rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a dráhu h , přičemž dosáhne rychlosti v , poté urazí rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti $a_1 = g \sin \alpha$ dráhu $s_1 = \frac{v^2}{2a_1}$. Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh = mgh \sin \alpha + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

bezprostředně před zastavením tělesa B o podložku plyne

$$v = \sqrt{gh(1 - \sin \alpha)}.$$

Pro hledanou dráhu s pak platí

$$s = h + s_1 = h + \frac{v^2}{2a_1} = h + \frac{gh(1 - \sin \alpha)}{2g \sin \alpha} = h + \frac{h \frac{l-h}{l}}{2 \frac{h}{l}} = \frac{l+h}{2} = 1,5 \text{ m}.$$

4 body

3. a) Z časových rovnic vodorovného vrhu $x = v_0 t$, $y = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$, dostaneme vyloučením času t rovnici trajektorie

$$y = h_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2. \quad (2)$$

Z ní položením $x = d_1$, $y = h_1$ dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2(h_0 - h_1)}}d_1, \quad (3)$$

$$v_0 = 20,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- b) Označme d x -ovou souřadnici místa dopadu. Položením $y = 0$, $x = d$ v rovnici (2) a s použitím rovnice (3) dostaneme

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = d_1 \sqrt{\frac{h_0}{h_0 - h_1}},$$

tedy hledaná vzdálenost je

$$d_2 = d - d_1 = d_1 \left(\sqrt{\frac{h_0}{h_0 - h_1}} - 1 \right) = 2,94 \text{ m}.$$

3 body

- c) Ze zákona zachování mechanické energie $mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$, s použitím rovnice (3) plyne

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \sqrt{\frac{g}{2(h_0 - h_1)}d_1^2 + 2gh_0} = 21,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

- d) Položením $y = 0$, $x = d_3$ v rovnici (2) dostaneme

$$v'_0 = \sqrt{\frac{g}{2h_0}}d_3 = 27,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Poznámka:

U špičkových hráčů dosahuje počáteční rychlost míčku při podání hodnotu přes $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, přesto míček dopadne do pole podání. Důvody jsou dva: 1. rotace míčku a odpor vzduchu společně způsobí pohyb po křivce odlišné od paraboly, 2. míček opouští raketu v předklonu hráče s počátečním směrem rychlosti mírně šikmo dolů.

4. a)

$$\frac{\varrho_Z}{\varrho_M} = \frac{\frac{M_Z}{R_Z^3}}{\frac{M_M}{R_M^3}} = \frac{M_Z}{M_M} \left(\frac{R_M}{R_Z} \right)^3 = 1,64.$$

2 body

b)

$$\frac{S_Z}{S_M} = \frac{4\pi R_Z^2}{4\pi R_M^2} = \left(\frac{R_Z}{R_M} \right)^2 = 13,5.$$

2 body

c)

$$\frac{a_{gZ}}{a_{gM}} = \frac{\varkappa \frac{M_Z}{R_Z^2}}{\varkappa \frac{M_M}{R_M^2}} = \frac{M_Z}{M_M} \left(\frac{R_M}{R_Z} \right)^2 = 6,04.$$

2 body

d)

$$\frac{v_{uZ}}{v_{uM}} = \frac{\sqrt{2\varkappa \frac{M_Z}{R_Z}}}{\sqrt{2\varkappa \frac{M_M}{R_M}}} = \sqrt{\frac{M_Z}{M_M} \frac{R_M}{R_Z}} = 4,71.$$

2 body

e) Z rovnosti $\varkappa \frac{M_Z}{r_Z^2} = \varkappa \frac{M_M}{r_M^2}$ velikostí intenzit gravitačních polí v hledaném bodě B pak plyne

$$\frac{r_Z}{r_M} = \sqrt{\frac{M_Z}{M_M}} = 9,02.$$

2 body