

Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

Autoři úloh:

1. a) Uražená dráha je $v_0 t_1 = (v - v_0)(t - t_1)$. Z rovnice plyne

$$t_1 = \frac{v - v_0}{v} t_0 = 45 \text{ min.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- b) Doba plavby je $t_0 = \frac{d_1}{v_0} + \frac{d_1}{v - v_0}$. Z rovnice plyne

$$d_1 = \frac{v - v_0}{v} v_0 t_0 = 4\,050 \text{ m.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Uražená dráha je $(v + v_0)t_2 = (v - v_0)(t_0 - t_2)$. Z rovnice plyne

$$t_2 = \frac{v - v_0}{2v} t_0 = 22,5 \text{ min.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- d) Uražená dráha je $(v - v_0)t_3 = (v + v_0)(t_0 - t_3)$. Z rovnice plyne

$$t_3 = \frac{v + v_0}{2v} t_0 = 37,5 \text{ min.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- e) Doba plavby je $t_0 = \frac{d_2}{v + v_0} + \frac{d_2}{v - v_0}$. Z rovnice plyne

$$d_2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2v} t_0 = 10\,125 \text{ m.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- f) Jde pouze o záměnu pořadí plavebních úseků, výsledek je stejný jako v úloze e):

$$d_3 = d_2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2v} t_0 = 10\,125 \text{ m.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

2. a) Na třetím úseku je zrychlení o velikosti $a_3 = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{3 - 0}{9 - 7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ způsobeno třecí silou o velikosti $F_t = ma_3 = fmg$. Z rovnice plyne

$$f = \frac{a_3}{g} = 0,15. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- b) Dráha je číselně rovna obsahu plochy omezené grafem:

$$s = \left[\frac{3 \cdot 3}{2} + 3(7 - 3) + \frac{3 \cdot (9 - 7)}{2} \right] \text{ m} = 19,5 \text{ m.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

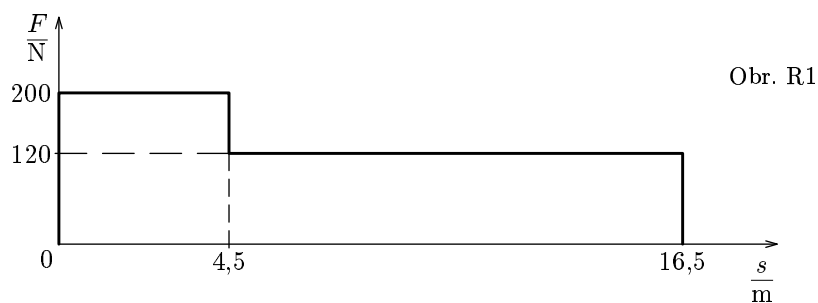
- c) Práce vykonaná chlapcem je rovna práci spotřebované třecí silou na celé dráze:

$$W = F_t s = fmg s = 2\,340 \text{ J} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

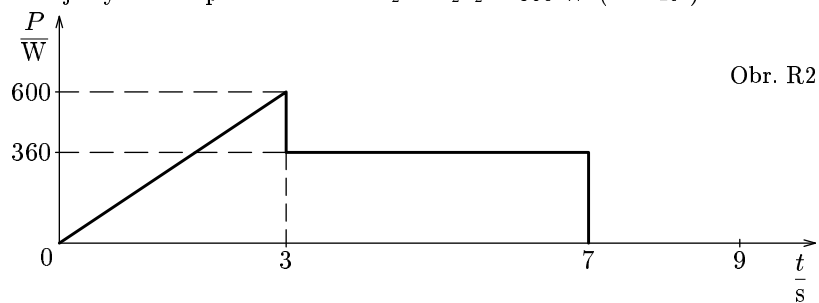
- d) Průměrný výkon chlapce určíme jako podíl celkové práce a doby jeho působení na bednu $\Delta t = 7 \text{ s}$:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = 334 \text{ W.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- e) Síla na prvním úseku má velikost $F_1 = fmg + ma_1$, kde $a_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ určíme z grafu rychlosti. Síla na druhém úseku má velikost $F_2 = mgf$ (obr. R1).



Na prvním úseku okamžitá rychlost rovnoměrně roste s časem, proto při konstantní síle F_1 je okamžitý výkon chlapce podle vzorce $P = F_1 v = F_1 a_1 t$ přímo úměrný času. V čase $t_1 = 3$ s je jeho okamžitá hodnota $P_1 = F_1 v_1 = 600$ W. Na druhém úseku je výkon chlapce konstantní $P_2 = F_2 v_2 = 360$ W (obr. R2).



4 body

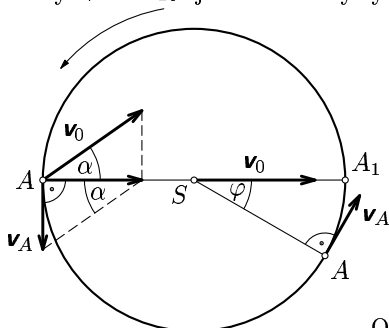
f) V každém grafu je práce číselně rovna obsahu plochy pod grafem.

V prvním grafu $w = [200 \cdot 4,5 + 120(16,5 - 4,5)]$ J = 2 340 J.

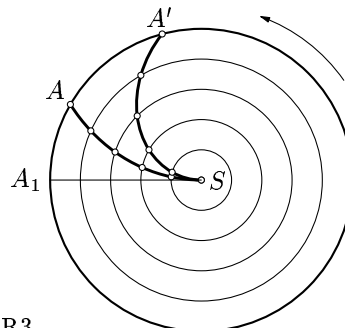
V druhém grafu $W = \left[\frac{600 \cdot 3}{2} + 360(7 - 3) \right]$ J = 2 340 J.

2 body

3. Úlohy a) až d) budeme řešit z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě vně desky. V obr. R2 jsou zobrazeny rychlosti v počátečním okamžiku.



Obr. R2



Obr. R3

- a) Rychlost $\mathbf{v}_0$ musí směřovat do bodu A' , do něhož se v tomto okamžiku dostane míček i Adam na obvodu desky. Z této podmínky plyne

$$\varphi = \omega t_\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{R}{v_0} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Míček se v počátečním okamžiku získá v rovině desky rychlost, která je výslednicí rychlosti Adama $\mathbf{v}_A$ a rychlosti $\mathbf{v}_0$ vzhledem k Adamovi. Výslednice musí směřovat do středu desky. Platí:

$$v_A = \frac{2\pi R}{T}, \quad \alpha = \arcsin \frac{v_A}{v_0} = \arcsin \frac{2\pi R}{v_0 T} = 35^\circ. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Hledané doby jsou

$$t_\varphi = \frac{R}{v_0} = 0,83 \text{ s}, \quad t_\alpha = \frac{R}{v_0 \cos \alpha} = 1,0 \text{ s}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- d) Stejným způsobem jako v úlohách a), b) dostaneme

$$\varphi_1 = \frac{2\pi R}{T'} = \frac{5}{12} \pi \text{ rad} = 75^\circ, \quad t\varphi' = t_\varphi = 0,83 \text{ s}.$$

Úhel α' neexistuje, neboť $v_A' > v_0$. Míček hozený Adamem nemůže do středu doletět. $\mathbf{2 \text{ body}}$

- e) Vzdálenost r hozeného míče od středu a úhel φ otočení desky se v závislosti na čase rovnoměrně zvětšují. Platí

$$r = v_0 t, \quad \varphi = \omega t = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi r}{v_0 T}.$$

Úhel otočení je přímo úměrný poloměru. Pro sestavení grafu sestavíme tabulku:

r	0	$0,2R$	$0,4R$	$0,6R$	$0,8R$	R
$\varphi(r)$ pro T	0	6°	12°	18°	24°	30°
$\varphi(r)$ pro T'	0	15°	30°	45°	60°	75°

Graf – obr. R3

$\mathbf{2 \text{ body}}$

4. a) Označme m hmotnost soupravy. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mg \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} m v_0^2, \quad v_0 = \sqrt{gl \sin \alpha} \doteq 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mg \left(s_1 - \frac{l}{2} \right) \sin \alpha = \frac{1}{2} m v_1^2, \quad s_1 = \frac{l}{2} + \frac{v_1^2}{2g \sin \alpha} \doteq 384 \text{ m}.$$

3 body

- c) Na nakloněnou rovinu vyjede část soupravy o hmotnosti $\frac{s_2 m}{l}$. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{s_2}{l} mg \frac{s_2}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} m v_2^2, \quad s_2 = v_2 \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}} \doteq 75 \text{ m}.$$

3 body

- d) Souprava se pohybuje se stálým zrychlením pouze v případě, že se celá nachází na nakloněné rovině.

1 bod

5. a) Vyjdeme z rovnic vrhu

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

V čase $t = t_1$ platí:

$$h_0 = h_0 + v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow v_0 t_1 \sin \alpha = \frac{g t_1^2}{2} \Rightarrow v_0 \sin \alpha = \frac{g t_1}{2},$$

$$d = v_0 t_1 \cos \alpha \Rightarrow v_0 \cos \alpha = \frac{d}{t_1}.$$

Z toho

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \frac{g t_1^2}{2d}, \quad \alpha \doteq 22^\circ,$$

$$v_0 = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} + \frac{g^2 t_1^2}{4}} \doteq 17,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V čase $t = t_1/2$ platí:

$$y = h = h_0 + \frac{v_0 t_1 \sin \alpha}{2} - \frac{g t_1^2}{8} = h_0 + \frac{g t_1^2}{8} \doteq 3,6 \text{ m}.$$

6 bodů

b) Pro délku vrhu platí

$$d = v_0 t_1 \cos \alpha = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad \text{Z toho} \quad v_0 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}}.$$

Velikost počáteční rychlosti je minimální pro $\alpha = \alpha' = 45^\circ$, kdy $\sin 2\alpha = 1$. Pak

$$v_0 = v_{\min} = \sqrt{gd} \doteq 14,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \textbf{2 body}$$

c) Doba letu při hodu podle b) je

$$t'_1 = \frac{d}{v_{\min} \cos \alpha'} = \frac{d}{\sqrt{gd} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \doteq 2,1 \text{ s}. \quad \textbf{2 body}$$

6. a) V místě přistání působí na sondu gravitační síla o velikosti

$$F_g = 0,450 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 4,4 \text{ N}.$$

Intenzita gravitačního pole má velikost $K = \frac{F_g}{m} = 0,0089 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. **1 bod**

- b) Označme M hmotnost planety. Z rovnic

$$K = \frac{\kappa M}{r^2}, \quad M = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 \quad \text{plyne} \quad r = \frac{3K}{4\pi\kappa\rho} \doteq 14,5 \text{ km} \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Označme m hmotnost družice. Z rovnosti mezi gravitační a dostředivou silou a z předcházejícího vztahu plyne

$$\frac{mv_k^2}{r} = \frac{\kappa M m}{r^2} \quad v_k = \frac{K}{\sqrt{\frac{4}{3}\kappa\rho}} \doteq 11,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V porovnání s první kosmickou rychlostí tělesa na Zemi je tato rychlost podstatně menší a jsme schopni jí dosáhnout např. i hodem tělesa rukou. **3 body**

- d) Platí $T = (2\pi r)/v_k$. Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa\rho}} \doteq 2 \text{ h } 14 \text{ min}.$$

Perioda je srovnatelná s periodou družice Země, závisí totiž pouze na hustotě centrálního tělesa, nikoliv na jeho velikosti. Země má větší střední hustotu, perioda oběhu v její těsné blízkosti je proto menší, přibližně 1 h 24 min. **3 body**