

**Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.**

*Kategorie C*

Autor úloh: P. Šedivý

- 1.a) Bez tření by se lyžař pohyboval se zrychlením  $a = g \sin \alpha$ . Dosáhl by rychlosti

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2gl \sin \alpha} = 13,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

a jízda by trvala

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} = 4,45 \text{ s}.$$

**3 body**

- b) Ve skutečnosti se lyžař pohyboval se zrychlením

$$a_1 = \frac{F_G \sin \alpha - f F_G \cos \alpha}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = \frac{2l}{t_1^2}.$$

Z toho

$$f = \frac{\sin \alpha - \frac{2l}{gt_1^2}}{\cos \alpha} = 0,236.$$

**4 body**

- c) Na konci svahu má lyžař

$$\text{rychlost } v_1 = \frac{2l}{t_1} \text{ a kinetickou energii } E_k = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

která se při jízdě po louce spotřebuje na vykonání práce při překonávání tření. Platí

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgs, \quad s = \frac{v_1^2}{2gf} = \frac{2l^2}{gft_1^2} = 10,8 \text{ m}.$$

**3 body**

- 2.a) Vydeme z obr. R1, délku trámu označme  $l$ . Zvolíme vztažnou soustavu s vodorovnou osou  $x$  a svislou osou  $y$ . Z momentové věty pro osu v bodě  $A$  plyne

$$F_B |AS| = F_G |AP|, \quad F_B l \cos \frac{\alpha}{2} = F_G \frac{l}{2} \sin \alpha = F_G l \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$F_B = F_G \sin \frac{\alpha}{2} = 82,8 \text{ N}.$$

**4 body**

- b) Vektorový součet všech sil působících na trám je nulový:  $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_G = \mathbf{0}$ .  
Z toho ve vodorovném směru, tj. ve směru osy  $x$

$$F_{Ax} = -F_{Bx} = F_B \cos \frac{\alpha}{2} = F_G \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

ve svislém směru, tj. ve směru osy  $y$

$$F_{Ay} = F_G - F_{By} = F_G - F_B \sin \frac{\alpha}{2} = F_G - F_G \sin^2 \frac{\alpha}{2} = F_G \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

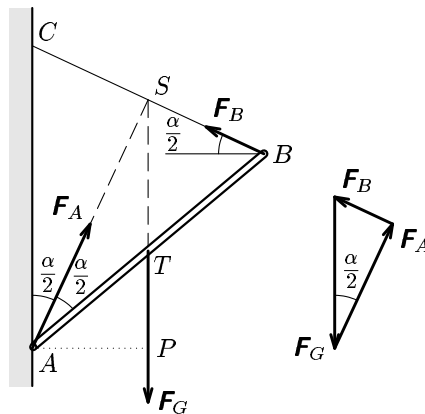
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{F_G^2 \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\alpha}{2} \right)} = F_G \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$F_A = 177,6 \text{ N}.$$

Síla  $\mathbf{F}_A$  je od svislého směru odchýlena o úhel  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \frac{F_G \sin \frac{\alpha}{2}}{F_G \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

**6 bodů**



Obr. R1

Jednodušší řešení: Vektorová přímka síly  $\mathbf{F}_A$  musí procházet průsečíkem vektorových přímek sil  $\mathbf{F}_B$  a  $\mathbf{F}_G$ , tedy bodem  $S$ . Tím je určen směr síly  $\mathbf{F}_A$ , která je od svislého směru odchýlena o  $\alpha/2$ . Silový trojúhelník sil  $\mathbf{F}_A$ ,  $\mathbf{F}_B$  a  $\mathbf{F}_G$  je podobný s trojúhelníkem  $ASC$ , který je pravoúhlý. Z toho plyne

$$F_A = F_G \cos \frac{\alpha}{2}, \quad F_B = F_G \sin \frac{\alpha}{2}.$$

3.a) Z grafu odečteme  $T = 1,50$  s. Z toho  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4,19 \text{ s}^{-1}$ .

**1 bod**

b) Platí

$$F = -ky = ma = -m\omega^2 y, \quad k = m\omega^2 = 3,51 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

**1 bod**

c) Nejprve určíme amplitudu zrychlení

$$a_m = \frac{F_m}{m} = \frac{0,75 \text{ N}}{0,200 \text{ kg}} = 3,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Platí

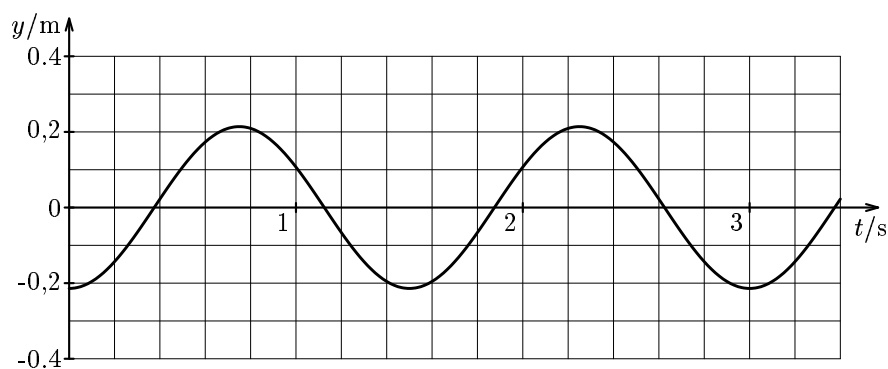
$$y_m = \frac{a_m}{\omega^2} = 0,214 \text{ m}, \quad v_m = \omega y_m = \frac{a_m}{\omega} = 0,895 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**3 body**

d) Z grafu je  $F = F_m \cos(\omega t) = -ky$ . Z toho

$$y = -\frac{F_m}{k} \cos(\omega t) = -y_m \cos(\omega t) = y_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

**3 body**



Obr. R2

**2 body**

4.a) Ze vztahu

$$l = l_0(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = l_0 + \Delta l$$

vyjádříme relativní prodloužení:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty  $\{\alpha_1\}$ ,  $\{\alpha_2\}$ :

$$\begin{aligned} 100\{\alpha_1\} + 1 \cdot 10^4\{\alpha_2\} &= 0,00120, \\ 200\{\alpha_1\} + 4 \cdot 10^4\{\alpha_2\} &= 0,00251. \end{aligned}$$

Řešením dostaneme:

$$\begin{aligned} \{\alpha_1\} &= 1,145 \cdot 10^{-5}, \quad \{\alpha_2\} = 5,5 \cdot 10^{-9}, \\ \alpha_1 &= 1,145 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_2 = 5,5 \cdot 10^{-9} \text{ K}^{-2}. \end{aligned}$$

**5 bodů**

b) Závislost objemu na teplotě vyjadřuje vztah, který odvodíme pro těleso krychlového tvaru:

$$V = l^3 = l_0^3 \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0 \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0 (1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2).$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty  $\{\beta_1\}$ ,  $\{\beta_2\}$ :

$$\begin{aligned} 1 + 100\{\beta_1\} + 1 \cdot 10^4\{\beta_2\} &= 1,003604322, \\ 1 + 200\{\beta_1\} + 4 \cdot 10^4\{\beta_2\} &= 1,007548916. \end{aligned}$$

Řešením dostaneme:

$$\begin{aligned} \{\beta_1\} &= 3,434 \cdot 10^{-5}, \quad \{\beta_2\} = 1,7 \cdot 10^{-8}, \\ \beta_1 &= 3,434 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad \beta_2 = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-2}. \end{aligned}$$

**5 bodů**

Jiné řešení úlohy b): Vyjdeme ze vztahu

$$V_0(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)^3 = V_0[1 + 3(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) + 3(\alpha_1^2 t^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 t^3 + \alpha_2^2 t^4) + (\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)^3]$$

Zanedbáním členů třetího a vyšších řádů dostaneme:

$$V_0[1 + 3\alpha_1 t + 3(\alpha_2 + \alpha_1^2)t^2 \approx V_0(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)],$$

$$\beta_1 = 3\alpha_1 = 3,435 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad \beta_2 = 3(\alpha_2 + \alpha_1^2) = 1,69 \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-2}.$$

Výsledky získané oběma způsoby se prakticky shodují.