

Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Autoři úloh: M. Jarešová (1), M. Randa (2), R. Horáková (3, 5), L'. Mucha (4),
P. Šedivý (6) a I. Volf (7)

- 1.a) Tíhová síla působící na kvádr je v rovnováze s tlakovou silou působící na jeho dolní podstavu. Síly působící na boční stěny kvádrů se navzájem ruší.

$$F_G = V \varrho_1 g = SH \varrho_1 g = F_p = Sh \varrho_2 g, \quad h = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} H = 17,4 \text{ cm}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Hydrostatický tlak rtuti se zvětší o hydrostatický tlak vrstvy vody. Tlaková síla působící na dolní podstavu kvádrů se zvětší a kvádr se vynoří ze rtuti. Platí

$$\varrho_1 SHg = \varrho_2 Sh'g + \varrho_3 Sxg,$$

$$h' = \frac{\varrho_1 H - \varrho_3 x}{\varrho_2} = 17,1 \text{ cm}. \quad (1)$$

2 body

- c) V tomto případě musí být $x_1 = H - h''$,

$$\varrho_1 SHg = \varrho_2 Sh''g + \varrho_3 S(H - h'')g, \quad h'' = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_3} H = 16,5 \text{ cm},$$

$$x_1 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_3} H = 13,5 \text{ cm}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

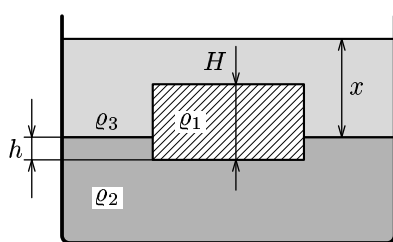
- d) Při dalším lití vody se již poloha kvádrů vzhledem k rozhraní kapalin nemění. Další růst tlakové síly působící na dolní podstavu je vykompenzován tlakovou silou působící na horní podstavu. Podle obr. R1 platí

$$\varrho_1 SHg = \varrho_2 Shg + \varrho_3 Sxg - \varrho_3 S[x - (H - h)]g = \varrho_2 Shg + \varrho_3 S(H - h)g,$$

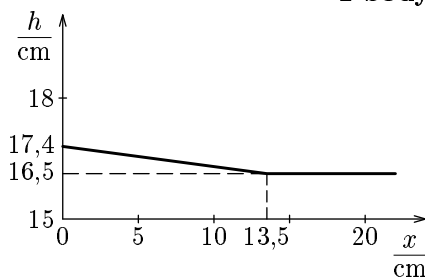
$$h = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_3} H = \text{konst.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- e) Vztah (1) je rovnice přímky – vyjadřuje závislost h na x od počátku lití vody až do výšky, kdy je celý kvádr potopen. Celý graf je na obr. R2.

2 body



Obr. R1



Obr. R2

2. Soutěžícím doporučujeme prostudování loňského studijního textu
Volf, Šedivý: Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli.

a) Planetku Chiron a Zemi porovnáme podle 3. Keplerova zákona:

$$\frac{a_{\text{Ch}}^3}{a_{\text{Z}}^3} = \frac{T_{\text{Ch}}^2}{T_{\text{Z}}^2} \Rightarrow a_{\text{Ch}} = a_{\text{Z}} \sqrt[3]{\frac{T_{\text{Ch}}^2}{T_{\text{Z}}^2}} = 13,71 \text{ AU}.$$

V dalším výpočtu použijeme numerickou excentricitu ε :

$$r_{\text{p}} = a(1 - \varepsilon) \rightarrow \varepsilon = 1 - \frac{r_{\text{p}}}{a} = 0,38,$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 12,69 \text{ AU},$$

$$r_{\text{a}} = a(1 + \varepsilon) = 2a - r_{\text{p}} = 18,92 \text{ AU}.$$

4 body

b) Použijeme vztah $v = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$, kde M je hmotnost Slunce:

$$v_{\text{p}} = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_{\text{p}}} - \frac{1}{a} \right)} = 12,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{\text{a}} = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_{\text{a}}} - \frac{1}{a} \right)} = 5,40 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

c) Obsah plochy omezené elipsou počítáme podobně jako obsah kruhu:

$$S = \pi ab = 550 \text{ AU}^2 = 1,22 \cdot 10^{25} \text{ m}^2.$$

Plošná rychlost planetky je

$$C = \frac{S}{T} = \frac{v_{\text{p}} r_{\text{p}}}{2} = \frac{v_{\text{a}} r_{\text{a}}}{2} = 7,6 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

d) 19. 2. 1996 + 50,78 r ... další průlet periheliem nastane na přelomu listopadu a prosince 2046.

1 bod

- 3.a) Je-li soustava v rovnováze, musí být výsledný moment vzhledem k libovolně zvolené ose otáčení nulový. Osu otáčení zvolíme v místě podpěry. Síla, kterou působí chlapec na lano, je stejně velká jako síla, kterou působí lano na těleso o hmotnosti m_2 . Velikost této síly označíme F . Z podmínky rovnováhy

$$d_3 m_3 g + d_4 m_4 g + F d_2 = d_1 m_1 g + d_2 m_2 g + F d_4$$

odvodíme:

$$F = g \frac{m_3 d_3 + m_4 d_4 - m_1 d_1 - m_2 d_2}{d_4 - d_2} = g \frac{m_3 + 7m_4 - 5m_1 - 3m_2}{4} \approx 370 \text{ N}.$$

3 body

- b) Minimální hmotnost má chlapec, který za lano netáhne vůbec, tedy $F_{\min} = 0$. Z podmínky rovnováhy určíme hmotnost chlapce:

$$d_3 m_3 g + d_4 m_{4\min} g = d_1 m_1 g + d_2 m_2 g,$$

$$m_{4\min} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 - m_3 d_3}{d_4} = \frac{5m_1 + 3m_2 - m_3}{7} = 29 \text{ kg}.$$

3 body

Maximální síla, kterou může chlapec působit, má velikost $F_{\max} = m_2 g$. Potom těleso o hmotnosti m_2 na fošnu nepůsobí. Vyjádříme opět podmínku pro rovnovážný stav:

$$d_1 m_1 g = d_3 m_3 g + d_4 m_{4\max} g - d_4 m_2 g,$$

$$m_{4\max} = \frac{m_1 d_1 - m_3 d_3 + m_2 d_4}{d_4} = \frac{5m_1 - m_3 + 7m_2}{7} = 51 \text{ kg}.$$

3 body

Velikost síly, kterou chlapec působí na lano, je ve druhém případě $F_{\max} = m_2 g = 390 \text{ N}$. Velikost síly může tedy být z intervalu $\langle 0 \text{ N}, 390 \text{ N} \rangle$.

1 bod

4. $T_1 = 390 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$, $P_1 = 60 \text{ kW}$.

a) Pro účinnost platí

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,23 = 23 \text{ \%}.$$

3 body

b) Pro účinnost rovněž platí

$$\eta = \frac{P_1 - P_2}{P_1} = 1 - \frac{P_2}{P_1} \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1(1 - \eta) = P_1 \frac{T_2}{T_1} \approx 46 \text{ kW}.$$

4 body

c) Průměrný pracovní výkon motoru je

$$P = P_1 - P_2 = P_1 \eta = P_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \approx 14 \text{ kW}.$$

3 body

5. Těsně před nárazem má kulička rychlost $\mathbf{v}_1$. Těsně po odrazu má kulička rychlost $\mathbf{v}_2$ v opačném směru a kvádr rychlost $\mathbf{v}_3$ ve směru nárazu.

- a) Podle zákona zachování mechanické energie získá kulička po uvolnění mezi polohami A a B rychlost

$$v_1 = \sqrt{2gl} = 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (1)$$

Také rychlost kuličky po odrazu určíme pomocí zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgl(1 - \cos \alpha_1), \quad v_2 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_1)} = 1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2)$$

3 body

- b) Při srážce je splněn zákon zachování hybnosti

$$mv_1 = -mv_2 + Mv_3. \quad (3)$$

Ze vztahů (2) a (3) dostaneme

$$v_3 = \frac{m}{M}(v_1 + v_2) = \frac{m}{M}(1 + \sqrt{1 - \cos \alpha_1}) \sqrt{2gl}.$$

Při brzdění kvádru třením je úbytek kinetické energie roven vykonané práci:

$$\frac{1}{2}Mv_3^2 = F_t d = fMgd,$$

$$d = \frac{v_3^2}{2gf} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{l}{f} (1 + \sqrt{1 - \cos \alpha_1})^2 = 0,47 \text{ m}.$$

4 body

- c) V případě dokonale pružné srážky se zachovává mechanická energie:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Mv_3^2. \quad (4)$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne $v_2 = \frac{M-m}{M+m}v_1$.

Podobně jako v úloze a) odvodíme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\cos \alpha_2 = 1 - \frac{v_2^2}{2gl} = 1 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} \doteq 0,64, \quad \alpha_2 \doteq 50^\circ.$$

3 body

7.a) Ze stavové rovnice odvodíme:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}, \quad \varrho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0}, \quad \varrho = \varrho_0 \frac{pT_0}{p_0T}.$$

Za p dosadíme $p_h + \varrho_v hg = 5,9 \cdot 10^5$ Pa a dostaneme

$$\varrho = 1,293 \frac{5,9 \cdot 10^5 \cdot 273,15}{1,01325 \cdot 10^5 \cdot 277,15} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 7,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

5 bodů

b) Úpravou vztahu

$$\varrho = \varrho_0 \frac{pT_0}{p_0T} = \varrho_0 \frac{(p_h + \varrho_v gh)T_0}{p_0T}$$

dostaneme

$$h = \frac{\frac{\varrho p_0 T}{\varrho_0 T_0} - p_h}{\varrho_v g}.$$

Pro dané hodnoty

$$h = \frac{\frac{5 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \cdot 277,15}{1,293 \cdot 273,15} - 9,94 \cdot 10^4}{1000 \cdot 9,8} \text{ m} \approx 30 \text{ m}.$$

5 bodů