

Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

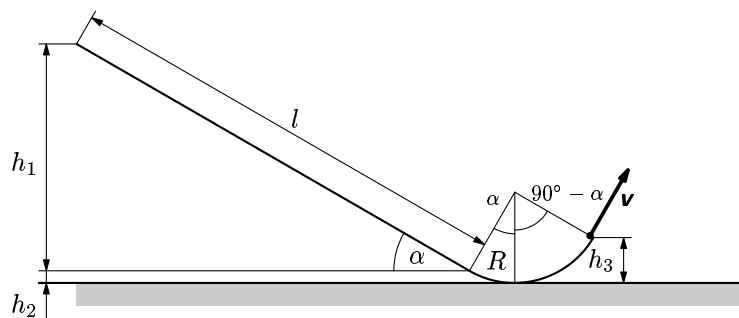
Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1), M. Randa (2), K. Rauner(3) a B. Vybíral (4).

Konečná úprava: P. Šedivý

1.a) Vyjdeme z obr. R1. Platí:

$$h_1 = l \sin \alpha, \quad h_2 = R(1 - \cos \alpha), \quad h_3 = R[1 - \cos(90^\circ - \alpha)] = R(1 - \sin \alpha).$$



Obr. R1

Dle zákona zachování mechanické energie platí:

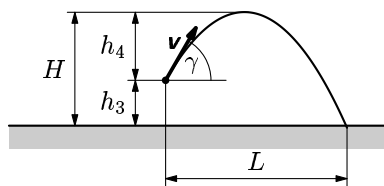
$$mg(h_1 + h_2) = mgh_3 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2, \quad \omega = \frac{v}{r},$$

$$g[l \sin \alpha + R(1 - \cos \alpha)] = gR(1 - \sin \alpha) + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}g[R(\sin \alpha - \cos \alpha) + l \sin \alpha]} = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

b) Jedná se o vrh šikmo vzhůru z počáteční výšky h_3 nad vodorovnou rovinou pod úhlem $\gamma = 90^\circ - \alpha$ s počáteční rychlostí $\mathbf{v}$ (viz obr. R2).



Obr. R2

$$H = h_3 + h_4, \quad \sin \gamma = \cos \alpha,$$

$$h_4 = \frac{v^2 \sin^2 \gamma}{2g},$$

$$h_4 = \frac{5}{7} \cos^2 \alpha [R(\sin \alpha - \cos \alpha) + l \sin \alpha]$$

$$H = \frac{5}{7} \cos^2 \alpha [R(\sin \alpha - \cos \alpha) + l \sin \alpha] + R(1 - \sin \alpha) = 0,66 \text{ m}.$$

2 body

c) Doba stoupání: $T_2 = \frac{v \sin \gamma}{g} = \frac{v \cos \alpha}{g}$

Doba klesání:

$$T_3 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{10 \cos^2 \alpha [R(\sin \alpha - \cos \alpha)] + l \sin \alpha}{7g} + \frac{2R(1 - \sin \alpha)}{g}}.$$

Celková doba letu: $T = T_2 + T_3 = 0,67 \text{ s}.$

2 body

d) Vodorovná vzdálenost L od místa, kde kulička opustí oblouk:

$$L = vT \cos \gamma = vT \sin \alpha = 1,16 \text{ m}.$$

2 body

2.a) Teplota ve stavu 1 je stejná jako ve stavu 2:

$$T_1 = T_2 = \frac{p_1 V_1}{n R_m} = 300 \text{ K}.$$

Z Boylova-Marriottova zákona:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1}{3} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

1 bod

b) Při izotermickém ději 2–1 platí $T = T_1 = \text{konst.}$ Rovnici přímky, na které leží graf děje 1–2, můžeme napsat ve tvaru $p = aV + b$. Koeficienty a , b nalezneme řešením soustavy rovnic

$$p_1 = aV_1 + b, \quad \frac{1}{3}p_1 = a \cdot 3V_1 + b.$$

Dostaneme:

$$a = -\frac{p_1}{3V_1}, \quad b = \frac{4}{3}p_1,$$

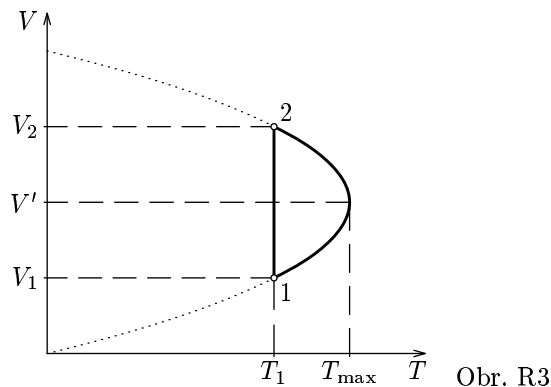
$$p = -\frac{p_1}{3V_1}V + \frac{4}{3}p_1.$$

Po dosazení do stavové rovnice máme:

$$-\frac{p_1}{3V_1}V^2 + \frac{4}{3}p_1V = nR_mT, \quad T = \frac{4p_1}{3nR_m}V - \frac{p_1}{3nR_mV_1}V^2.$$

Jde tedy o kvadratickou funkci. Její graf ve V - T diagramu (obr. R3) je parabola.

4 body



Obr. R3

- c) Ze symetrie paraboly plyne, že plyn bude mít největší teplotu během děje 1–2 při objemu

$$V' = \frac{V_1 + V_2}{2} = 2V_1 = 100 \text{ l}.$$

Příslušná teplota je

$$T_{\max} = \frac{4p_1}{3nR_m}2V_1 - \frac{p_1}{3nR_m}4V_1^2 = \frac{4}{3} \frac{p_1 V_1}{nR_m} = \frac{4}{3} T_1 = 400 \text{ K}.$$

Příslušný tlak je

$$p' = \frac{nR_m \cdot \frac{4}{3} T_1}{2V_1} = \frac{2}{3} p_1 = 6,7 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

3 body

- d) Celková práce plynu během jednoho cyklu je rovna rozdílu práce vykonané při ději 1–2 a práce spotřebované při ději 2–1:

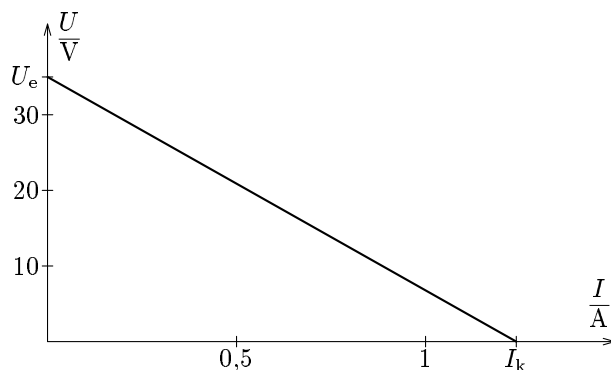
$$W' = \frac{p_1 + \frac{p_1}{3}}{2} (3V_1 - V_1) - nR_m T_1 \ln \frac{3V_1}{V_1} = p_1 V_1 \left(\frac{4}{3} - \ln 3 \right) = 1,17 \text{ kJ}.$$

2 body

- 3.a) Nestabilizovaný zdroj Z má lineární zatěžovací charakteristiku popsanou vztahem

$$U = U_e - R_i I.$$

Získáme ji spojením bodu $[0, U_e]$ na ose napětí a bodu $[I_k, 0]$ na ose proudu (obr. R4). $I_k = U_e/R_i$ je proud nakrátko, v našem případě $I_k = 1,4$ A.



Obr. R4

2 body

- b) V nezatíženém stavu je na Zenerově diodě napětí U'_0 a prochází jí proud

$$I_{d0} = \frac{U'_0 - U_z}{R_d} = \frac{U_e - U'_0}{R_i + R_1}.$$

Úpravou dostaneme

$$U'_0 = \frac{U_e R_d + U_z (R_i + R_1)}{R_d + R_i + R_1} = 11,2 \text{ V}.$$

2 body

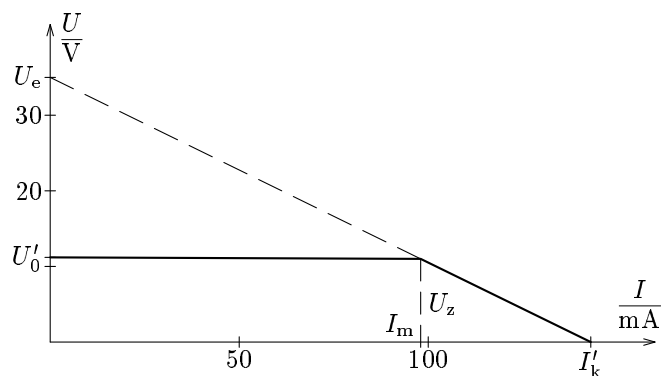
- c) Stabilizační účinek Zenerovy diody se přestane uplatňovat, když svorkové napětí klesne právě na Zenerovo napětí U_z a diodou přestane procházet proud. V tomto případě platí

$$I_m = \frac{U_e - U_z}{R_i + R_1} = 98 \text{ mA}.$$

2 body

- d) Zatěžovací charakteristika zdroje Z' má dva lineární úseky (obr. R5). Stabilizovaný úsek leží mezi body $[0, U'_0]$ a $[I_m, U_z]$. Po překročení proudu I_m se Zenerova dioda neuplatňuje a platí $U = U_e - (R_i + R_1) I$. Tento úsek zatěžovací charakteristiky je omezen body $[I_m, U_z]$ a $[I'_k, 0]$, kde

$$I'_k = \frac{U_e}{R_i + R_1} = 143 \text{ mA}.$$



Obr. R5

2 body

- e) Průběh zatěžovací charakteristiky v oblasti stabilizace určíme řešením rovnice

$$\frac{U_e - U}{R_i + R_1} = I_d + I = \frac{U - U_z}{R_d} + I.$$

Úpravou dojdeme ke vztahu

$$U = \frac{U_e R_d + U_z (R_i + R_1)}{R_d + R_i + R_1} - I \frac{R_d (R_i + R_1)}{R_d + R_i + R_1} = U'_0 - R'_i I.$$

Vnitřní odpor zdroje Z' v oblasti stabilizace je tedy

$$R'_i = \frac{R_d (R_i + R_1)}{R_d + R_i + R_1} \doteq R_d = 2,5 \, \Omega.$$

(Ke stejnému výsledku dojdeme i úpravou vztahu $U'_0 - U_z = R'_i I_m$.)

2 body

4.a) V mezním stavu je výslednice sil ve směru rychlosti nulová:

$$F = \frac{P}{v} - \frac{1}{2}CS_{\varrho}v^2 = 0.$$

Odtud

$$v = \sqrt[3]{\frac{2P}{CS_{\varrho}}}, \quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{2P}{C_1S_{\varrho}}} = 43,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 157 \text{ km/h},$$

$$v_2 = v_1 \sqrt[3]{\frac{C_1}{C_2}} = 146 \text{ km/h}.$$

5 bodů

b) Aby mezní rychlost druhého automobilu byla rovna mezní rychlosti prvního automobilu, musí být

$$\sqrt[3]{\frac{2(P + \Delta P)}{C_2S_{\varrho}}} = \sqrt[3]{\frac{2P}{C_1S_{\varrho}}}.$$

Odtud

$$\Delta P = P \left(\frac{C_2}{C_1} - 1 \right) = 6,03 \text{ kW}.$$

Výkon se musí zvýšit o 24,1 %.

5 bodů