

Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B

Autoři úloh: M. Randa (1, 2, 3), M. Jarešová (4), K. Rauner (5), I. Čáp (6),

L. Zdeborová (7). Konečná úprava: P. Šedivý a M. Jarešová

1. a) Jedná se o vrh šikmo vzhůru s počáteční rychlostí v_0 a elevačním úhlem β . Vztažnou soustavu Oxy zvolíme podle obr. R1. Platí:

$$v_x = v_0 \cos \beta, \quad v_y = v_0 \sin \beta - gt, \quad x = v_0 t \cos \beta, \quad y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Z toho známým způsobem určíme dobu letu kuliček T , souřadnice bodů dopadu D_1 , D_2 a výšku vrhů H :

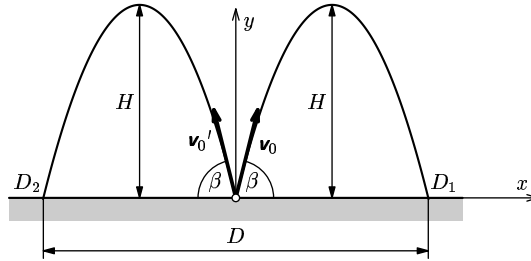
$$T = \frac{2v_0 \sin \beta}{g}, \quad D_{1,2} = \pm \frac{2v_0^2 \sin \beta \cos \beta}{g} = \pm \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}, \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g}.$$

Dle zadání má platit

$$D = D_1 - D_2 = \frac{4v_0^2 \sin \beta \cos \beta}{g} = 2H = \frac{2v_0^2 \sin^2 \beta}{2g}.$$

Z toho $\tan \beta = 4$, $\beta = 76^\circ$.

Pro dané hodnoty $T = 0,99$ s, $D_{1,2} = 1,20$ m, $D = 2,40$ m.



Obr. R1

3 body

- b) Má-li být D největší, pak $\sin 2\beta = 1$, tj. $\beta = 45^\circ$. Pak $D = \frac{2v_0^2}{g}$.

Pro dané hodnoty $D = 5,10$ m.

1 bod

- c) Vztažnou soustavu Oxy zvolíme podle obr. R2, kde osa x je orientovaná podél nakloněné roviny dolů, osa y míří vzhůru kolmo k nakloněné rovině.

Pro kuličku vrženou ve směru dolů platí:

$$a_x = g \sin \alpha, \quad v_x = v_0 \cos \beta + gt \sin \alpha, \quad x = v_0 t \cos \beta + \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha,$$

$$a_y = -g \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \beta - gt \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2 \cos \alpha.$$

Druhá kulička se liší znaménkem u v_0 ve vztazích pro v_x , x :

$$v_x = -v_0 \cos \beta + gt \sin \alpha, \quad x = -v_0 t \cos \beta + \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha.$$

V maximální vzdálenosti od roviny je $v_y = 0$, tj. $0 = v_0 \sin \beta - gT_1 \cos \alpha$, kde T_1 je doba stoupání. Potom

$$T_1 = \frac{v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha} \text{ (stejná pro obě kuličky).}$$

Doba letu kuliček je $T = 2T_1 = \frac{2v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}$ (shodná pro obě kuličky). Maximální

vzdálenost kuliček od roviny (měřená ve směru osy y) je stejná pro obě tělesa. Platí

$$H = y(T_1) = v_0 \sin \beta \frac{v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{g^2 \cos^2 \alpha} \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g \cos \alpha}.$$

Souřadnice místa dopadu

$$D_{1,2} = \frac{2v_0^2 \sin \beta}{g \cos \alpha} (\pm \cos \beta + \operatorname{tg} \alpha \sin \beta).$$

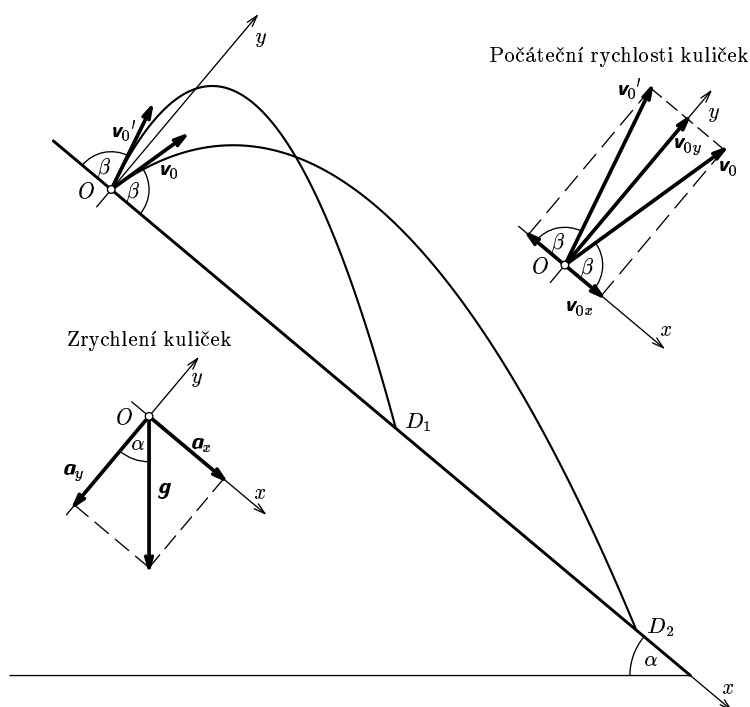
Vzdálenost obou míst

$$D = D_1 - D_2 = \frac{4v_0^2 \sin \beta \cos \beta}{g \cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \sin 2\beta}{g \cos \alpha}.$$

Ze zadání plyne

$$\frac{4v_0^2 \sin \beta \cos \beta}{g \cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \sin^2 \beta}{2g \cos \alpha}, \text{ odkud jako v a) } \operatorname{tg} \beta = 4, \text{ tj. } \beta = 76^\circ.$$

Pro dané hodnoty $T = 1,29 \text{ s}$, $D_1 = 6,82 \text{ m}$, $D_2 = 3,69 \text{ m}$, $D = 3,13 \text{ m}$. **4 body**



Obr. R2

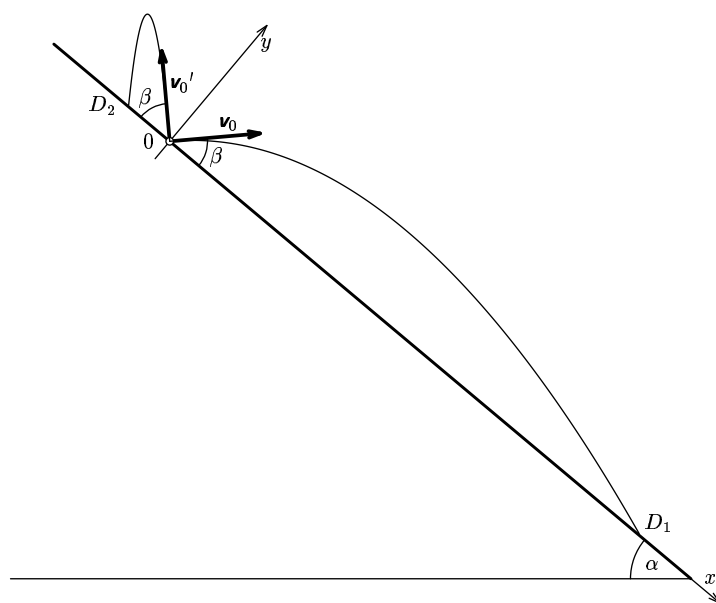
- d) Maximální vzdálenost míst dopadu bude při $\sin 2\beta = 1$, tj. $\beta = 45^\circ$ (obr. R3).
Pro dané hodnoty $D_1 = 6,12 \text{ m}$, $D_2 = -0,54 \text{ m}$, $D = 6,66 \text{ m}$. **1 bod**

- e) Pro $\alpha = 0^\circ$ je

$$T = \frac{2v_0 \sin \beta}{g}, \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g}, \quad D_{1,2} = \pm \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}, \quad D = \frac{2v_0^2 \sin 2\beta}{g},$$

což jsou vztahy z úloh a), b).

1 bod



Obr. R3

2. Po přestřžení nitě budou na soustavu válců působit jen vnější tíhové síly a vnitřní síly zprostředkované pružinou. Těžiště soustavy bude padat volným pádem. Děj nejsnáze popíšeme ve vztažné soustavě spojené s těžištěm, tedy „v beztlázném stavu“.

- a) V počátečním okamžiku je pružina napnuta silou o velikosti mg a prodloužena o $\Delta l = mg/k = 0,0784$ m. Aby se válce dostaly do rovnovážných poloh, kdy bude pružina nezatížená, musí se posunout větší válec o Δl_1 a menší o Δl_2 , což jsou také amplitudy výchylky kmitů, které po odstřžení začnou probíhat. Platí

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l = \frac{mg}{k}, \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{m}{M}.$$

Z toho

$$\Delta l_1 = y_{1m} = \Delta l \frac{m}{M+m} = \frac{m^2 g}{k(M+m)} = 0,0224 \text{ m},$$

$$\Delta l_2 = y_{2m} = \Delta l \frac{M}{M+m} = \frac{mMg}{k(M+m)} = 0,056 \text{ m}.$$

Jestliže válec o hmotnosti M kmitá s amplitudou y_{1m} a v krajní poloze na něj působí síla

$$F_m = mg = M\omega^2 y_{1m} = \omega^2 \frac{Mm^2 g}{k(M+m)},$$

pak

$$\omega = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \approx 13,2 \text{ s}^{-1}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \approx 0,475 \text{ s}$$

4 body

- b) Ve vztažné soustavě spojené se Zemí bude pohyb válců složen z kmitání vyšetřeneho v úkolu a) a volného pádu. Pružina se bude poprvé nacházet v nezatíženém stavu v čase

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \approx 0,119 \text{ s}.$$

Horní válec bude mít rychlost o velikosti

$$v_1 = gt_1 + \omega y_{1m} \approx (1,164 + 0,296) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 1,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dolní válec bude mít rychlost o velikosti

$$v_2 = gt_1 - \omega y_{2m} \approx (1,164 - 0,741) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- c) Vzdálenost válců bude poprvé minimální v čase

$$t_2 = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \approx 0,237 \text{ s}.$$

Dolní podstava horního válce bude ve výšce

$$h_1 = H - \frac{1}{2}gt_2^2 - 2\Delta l_1 \approx (2 - 0,276 - 2 \cdot 0,0224) \text{ m} \approx 1,68 \text{ m}.$$

Horní podstava dolního válce bude ve výšce

$$h_2 = h_1 - (l_0 - \Delta l) \approx 1,68 - (0,20 - 0,0784) \text{ m} \approx 1,56 \text{ m}.$$

3 body

3. a) V celé nádobě je stejný tlak a teplota. Ze stavové rovnice

$$\frac{pV}{T} = nR$$

plyne, že látková množství vodní páry a vzduchu jsou ve stejném poměru jako objemy obou částí nádoby. Při zahřívání nádoby dochází nejprve k vypařování vody a látkové množství páry se zvětšuje, zatímco látkové množství vzduchu se nemění. Proto se objem části s vodou a vodní párou zvětšuje. Jedná se tedy o tu část nádoby, která původně zabírala jednu třetinu celého objemu. Po odpaření vody se poměr látkových množství obou plynů nemění a píst se přestane pohybovat.

4 body

- b) Označme V objem nádoby, m_p a m_v původní hmotnosti páry a vody, n_p a n_v jejich látková množství, n látkové množství vzduchu. Platí

$$\frac{n_p}{n} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n_p + n_v}{n} = \frac{2}{1}.$$

Vydělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{n_p + n_v}{n_p} = 4, \quad \frac{n_v}{n_p} = \frac{m_v}{m_p} = 3.$$

3 body

- c) Označme m'_v hmotnost odpařené vody a n'_v její látkové množství. Obdobně jako v b):

$$\frac{n_p}{n} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n_p + n'_v}{n} = 1.$$

Vydělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{n_p + n'_v}{n_p} = 2, \quad n'_v = n_p \Rightarrow m'_v = m_p.$$

Hmotnosti vody a vodní páry jsou při průchodu pístu středem nádoby stejné, neboť

$$\frac{m_v - m'_v}{m_p + m'_v} = \frac{2m_p}{2m_p} = 1.$$

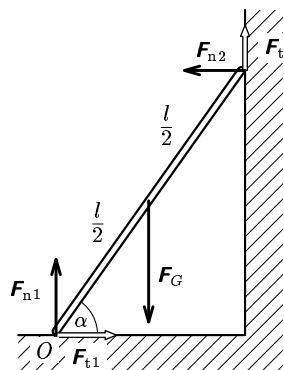
3 body

4. a) Na žebřík, který je v rovnováze, působí tíhová síla $\mathbf{F}_G$, reakce podlahy s normálovou složkou $\mathbf{F}_{n1}$ a tečnou složkou $\mathbf{F}_{t1}$ a reakce stěny s normálovou složkou $\mathbf{F}_{n2}$ a tečnou složkou $\mathbf{F}_{t2}$ (obr. R5). Tečné složky reakcí jsou třecí síly, které brání sklouznutí žebříku. Předpokládáme tedy, že mají směry vyznačené na obrázku a splňují podmínky

$$F_{t1} \leq f_1 \cdot F_{n1}, \quad F_{t2} \leq f_2 \cdot F_{n2}.$$

Aby nastala rovnováha, musí se vodorovné i svislé složky sil co do účinku rušit:

$$F_{t2} + F_{n1} = F_G, \quad F_{t1} = F_{n2}. \quad (1)$$



Obr. R5

Kromě toho se musí v účinku také rušit otáčivé momenty vzhledem k libovolnému bodu. Zvolíme-li za tento bod dolní konec žebříku O , musí platit

$$F_{n2} \cdot l \sin \alpha + F_{t2} \cdot l \cos \alpha - F_G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

V mezním případě, kdy $\alpha = \alpha_{\min}$, platí

$$F_{t1} = f_1 \cdot F_{n1}, \quad F_{t2} = f_2 \cdot F_{n2}. \quad (3)$$

Řešením soustavy rovnic (1) až (3) dostaneme

$$\begin{aligned} F_{n2} &= f_1 \cdot F_{n1}, \quad F_{t2} = f_1 f_2 \cdot F_{n1}, \quad F_G = F_{n1} + f_1 f_2 \cdot F_{n1}, \\ f_1 F_{n1} l \sin \alpha_{\min} + f_1 f_2 F_{n1} l \cos \alpha_{\min} - (F_{n1} + f_1 f_2 F_{n1}) \frac{l}{2} \cos \alpha_{\min} &= 0, \\ \operatorname{tg} \alpha_{\min} &= \frac{1 - f_1 f_2}{2 f_1}, \quad \alpha_{\min} = 58^\circ 16'. \end{aligned} \quad (4)$$

3 body

- b) Do vztahu (4) dosadíme $f_2 = 0$; pak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2 f_1}. \quad \text{Pro dané hodnoty} \quad \alpha_{\min} = 59^\circ 2'.$$

Z výsledku je vidět, že tření na zdi má pro úhel α zanedbatelný význam.

2 body

- c) Dosadíme-li do vztahu (4) za $f_1 = 0$, dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \infty, \quad \text{tj.} \quad \alpha_{\min} = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho vyplývá, že samotné tření na zdi žebřík neudrží.

2 body

- d) Vydeme z obr. R6. Obdobně jako v úloze a) napíšeme podmínky rovnováhy pro oba směry a otáčivý moment. V mezním případě platí

$$\begin{aligned} f_2 \cdot F_{n2} + F_{n1} &= F_{G1} + F_G, \quad f_1 \cdot F_{n1} = F_{n2}, \\ F_{n2}l \sin \alpha + f_2 F_{n2}l \cos \alpha - F_G \frac{l}{2} \cos \alpha - F_{G1} \cdot d \cos \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Po úpravě dostáváme

$$2F_{n2}(\sin \alpha + f_2 \cos \alpha) - mg \cos \alpha - 2m_1 g \frac{d}{l} \cos \alpha = 0,$$

odkud

$$d = \left(\frac{F_{n2}(\tan \alpha + f_2)}{m_1 g} - \frac{m}{2m_1} \right) l.$$

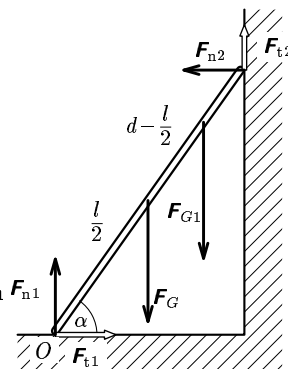
Z rovnic pro podmínky rovnováhy v obou směrech F_{n1} vyjádříme

$$F_{n2} = \frac{f_1(m_1 + m)g}{1 + f_1 f_2}.$$

Potom

$$d = \left(\frac{f_1(m + m_1)}{m_1(1 + f_1 f_2)} \tan \alpha + \frac{f_1 f_2(m + m_1)}{(1 + f_1 f_2)m_1} - \frac{m}{2m_1} \right) l.$$

Pro dané hodnoty $d = 0,54l = 2,2 \text{ m}$.



Obr. R6

3 body

- e) Má-li člověk bezpečně vylézt až nahoru, je třeba určit úhel α pro případ $d = l$, tj. určit úhel α nejlépe ze vztahu (5), kam za d dosadíme l . Po úpravě

$$2F_{n2} \cdot \sin \alpha = -2f_2 \cdot F_{n2} \cos \alpha + F_G \cos \alpha + 2F_{G1} \cos \alpha,$$

odkud po dosazení za F_{n2} dostaneme

$$\tan \alpha = \frac{(m + 2m_1)(1 + f_1 f_2)}{2f_1(m + m_1)} - f_2.$$

Pro dané hodnoty je $\alpha'_{\min} = 72^\circ 3'$.

2 body

5. a) Voltampérová charakteristika z obr. 6 se dá pro $U_d > U_{z0}$ popsat vztahem

$$I_d = \frac{U_d - U_{z0}}{R_d} . \quad (1)$$

Musí proto platit

$$P_m = U_{d \max} \frac{U_{d \max} - U_{z0}}{R_d} , \quad \Rightarrow \quad U_{d \max}^2 - U_{z0} U_{d \max} - P_m R_d = 0 .$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

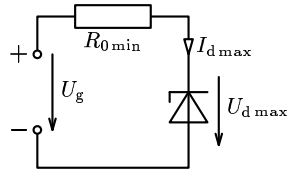
$$U_{d \max} = \frac{U_{z0} + \sqrt{U_{z0}^2 + 4P_m R_d}}{2} = 10,92 \text{ V} .$$

Protože i pro maximální hodnoty napětí a proudu diody musí platit vztah (1), je

$$I_{d \max} = \frac{\sqrt{U_{z0}^2 + 4P_m R_d} - U_{z0}}{2R_d} = 0,458 \text{ A} .$$

2 body

b)



Obr. R7

Nejnepříznivějšímu případu z hlediska výkonového zatížení Zenerovy diody odpovídá zapojení podle obr. R7. Platí

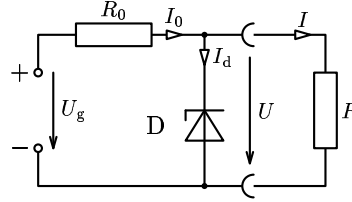
$$R_{0 \min} = \frac{U_{g2} - U_{d \max}}{I_{d \max}} = 19,8 \Omega .$$

1 bod

- c) Vyjdeme z obr. R8. V nejnepříznivějším případě $U_g = U_{g1}$ při zapojení minimální hodnoty zatěžovacího odporu $R_{\min}$ klesne proud I_d na nulu. Musí platit

$$U = U_{z0} , \quad I = I_0 = \frac{U_{g1} - U_{z0}}{R_0} = \frac{U_{z0}}{R_{\min}} ,$$

$$R_{\min} = \frac{R_0 U_{z0}}{U_{g1} - U_{z0}} = 100 \Omega .$$



Obr. R8

2 body

- d) Řešením soustavy rovnic

$$U_g - U = R_0 I_0 , \quad I_0 = I_d + I , \quad U = RI = U_{z0} + R_d I_d$$

dojdeme ke vztahu

$$U = \frac{U_{z0} + U_g \frac{R_d}{R_0}}{1 + \frac{R_d}{R_0} + \frac{R_d}{R}} . \quad (2)$$

Po dosazení mezních hodnot za U_g dostaneme $U_1 = 10,10 \text{ V}$, $U_2 = 10,29 \text{ V}$.

2 body

e) Ze vztahu (2) plyne

$$S = \frac{\Delta U_g}{U_g} \cdot \frac{U}{\Delta U} = \frac{\Delta U_g}{U_g} \cdot \frac{\frac{U_{x0} + U_g \frac{R_d}{R_0}}{1 + \frac{R_d}{R_0} + \frac{R_d}{R}}}{\frac{\Delta U_g \frac{R_d}{R_0}}{1 + \frac{R_d}{R_0} + \frac{R_d}{R}}} = 1 + \frac{R_0 U_{x0}}{R_d U_g}.$$

Pro $U_g = 18 \text{ V}$ dostaneme $S = 14,9$.

3 body

7. a) Pohybová složka tíhové síly musí překonat statické tření:

$$F_G \sin \alpha > f_s F_G \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > f_s,$$

což je pro dané hodnoty splněno.

1 bod

b) Tlaková složka tíhové síly je v rovnováze s kolmou složkou reakce nakloněné roviny. Ve směru nakloněné roviny působí na kvádr pohybová složka tíhové síly, síla pružiny a dynamické tření. Rovnováha nastane, když

$$F_G \sin \alpha - kx_0 - f_d F_G \cos \alpha = 0, \quad x_0 = \frac{Mg}{k}(\sin \alpha - f_d \cos \alpha).$$

Pro dané hodnoty $x_0 = 0,14 \text{ m}$.

1 bod

c) Kvádr se zastaví, když úbytek potenciální energie tíhové je roven součtu potenciální elastické energie pružiny a práce spotřebované dynamickým třením:

$$F_G \sin \alpha \cdot x_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 + f_d F_G \cos \alpha \cdot x_{\max}.$$

$$\text{Z toho} \quad x_{\max} = 2 \frac{Mg}{k}(\sin \alpha - f_d \cos \alpha) = 2x_0 = 0,28 \text{ m}.$$

3 body

d) Ve vzdálenosti $x_{\max}$ musí síla pružiny překonat statické tření:

$$kx_{\max} > f_s F_G \cos \alpha,$$

$$2k \frac{Mg}{k}(\sin \alpha - f_d \cos \alpha) > f_s Mg \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha > f_s + 2f_d.$$

Kromě toho musí mít pružina dostatečnou energii k vytažení kvádrů do vzdálenosti x_0 :

$$\frac{1}{2} k x_{\max}^2 > \frac{1}{2} k x_0^2 + f_d F_G \cos \alpha \cdot (x_{\max} - x_0) + F_G \sin \alpha \cdot (x_{\max} - x_0),$$

$$\frac{3}{2} k x_0 = \frac{3}{2} F_G (\sin \alpha - f_d \cos \alpha) > f_d F_G \cos \alpha + F_G \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha > 5f_d.$$

Obě podmínky jsou pro dané hodnoty splněny.

3 body

e) Pokud se bude kvádr pohybovat nahoru, dosáhne největší rychlosti ve vzdálenosti x_v , kde výslednice všech sil přestane působit nahoru, protože právě dosáhne nulové velikosti:

$$kx_v = F_G \sin \alpha + f_d F_G \cos \alpha, \Rightarrow x_v = \frac{Mg}{k}(\sin \alpha + f_d \cos \alpha).$$

Pro dané hodnoty $x_v = 0,199 \text{ m}$.

2 body