Řešení teoretických úloh celostátního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 3), M. Jarešová a P. Šedivý (2), B. Vybíral (4)

1. a) Náboj na kouli je $Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi = 111$ nC. **1 bod**

Na kyvadélko má otáčivý účinek tíhová síla F_G a elektrická síla F_e. Výsledný moment těchto sil vzhledem k bodu O při úhlové výchylce β odvodíme z obr. R1:

$$M = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\left(2l\sin\frac{\beta}{2}\right)^2} l\cos\frac{\beta}{2} - mgl\sin\beta\,. \tag{1}$$

V rovnovážné poloze platí $\beta = \beta_0$, $M = 0$,

$$Qq = 32\pi\varepsilon_0 mgl^2\sin^3\frac{\beta_0}{2}\,, \tag{2}$$

$$q = \frac{32\pi\varepsilon_0 mgl^2\sin^3\frac{\beta_0}{2}}{Q} = \frac{8mgl^2\sin^3\frac{\beta_0}{2}}{R\varphi} = 0{,}54\ \text{nC}\,.$$

3 body

b) V rovnovážné poloze napíná vlákno výslednice $\boldsymbol{F}$ sil $\boldsymbol{F}_G$ a $\boldsymbol{F}_e$, která má směr vlákna. Z podobnosti trojúhelníků na obr. R1 plyne

$$F = F_G = mg = 9{,}8\cdot 10^{-5}\ \text{N}\,.$$

1 bod

c) Spojením vztahů (1) a (2) dostaneme

$$M = \frac{32\pi\varepsilon_0 mgl^3\sin^3\frac{\beta_0}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{16\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\frac{\beta}{2}} - mgl\sin\beta\,,$$

$$M = mgl\left(\frac{2\sin^3\frac{\beta_0}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}} - 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right).$$

Dostali jsme funkci $M = M(\beta)$, která má v bodě $\beta = \beta_0$ hodnotu $M_0 = 0$. Hledáme veličinu

$$D = \left|\lim_{\gamma\to 0}\frac{M}{\gamma}\right| = \left|\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{M - M_0}{\beta - \beta_0}\right|,$$

což je derivace funkce $M(\beta)$ v bodě β_0.

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\beta} = mgl\left[\frac{\sin^3\frac{\beta_0}{2}\left(-\sin^3\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\right)}{\sin^4\frac{\beta}{2}} - \cos\beta\right] =$$

$$= mgl \frac{-\sin^3 \frac{\beta_0}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} + 2\cos^2 \frac{\beta}{2}\right) - \sin^4 \frac{\beta}{2} \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)}{\sin^4 \frac{\beta}{2}} .$$

Pro $\beta = \beta_0$ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\beta} = -3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2} .$$

Pro malou úhlovou výchylku γ z rovnovážné polohy tedy platí

$$M = -3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2} \gamma = -D\gamma , \qquad D = 3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2} .$$

3 body

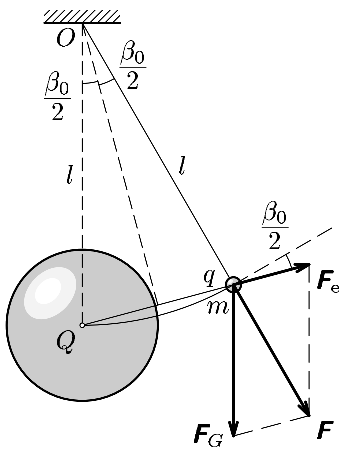
d) Periodu kmitů kyvadla určíme užitím vztahu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} ,$$

kde J je moment setrvačnosti, v našem případě $J = ml^2$, a D je direkční moment, který jsme určili v úkolu c).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2}}} = \frac{2\pi}{\cos \frac{\beta_0}{2}} \sqrt{\frac{l}{3g}} = 0{,}54 \text{ s} .$$

2 body



Obr. R1

Jiné řešení úkolu c):

Položme $\beta = \beta_0 + \gamma$. Pro $\gamma \ll \beta_0$ můžeme použít aproximační vztahy:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\beta_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{2}\mathrm{cotg}\frac{\beta_0}{2}\right)\,, \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta_0}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_0}{2}\right)\,,$$

a pro $x \ll 1$ vztah

$$\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x\,.$$

Při úpravách zanedbáme členy, kde se vyskytuje γ^2.

$$M \approx mgl\left[\frac{2\sin^3\frac{\beta_0}{2}\cdot\cos\frac{\beta_0}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\beta_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{2}\mathrm{cotg}\frac{\beta_0}{2}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - 2\sin\frac{\beta_0}{2}\cos\frac{\beta_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{2}\mathrm{cotg}\frac{\beta_0}{2}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_0}{2}\right)\right] =$$

$$= mgl2\sin\frac{\beta_0}{2}\cos\frac{\beta_0}{2}\left[1 - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_0}{2} - 2\frac{\gamma}{2}\mathrm{cotg}\frac{\beta_0}{2} - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\mathrm{cotg}\frac{\beta_0}{2} - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_0}{2}\right)\right]\,,$$

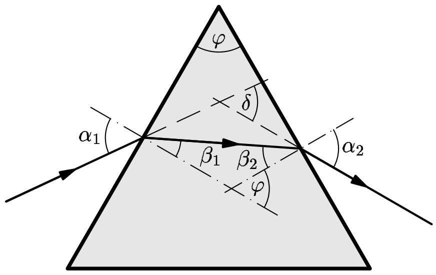
$$M = -3mgl\cos^2\frac{\beta_0}{2}\cdot\gamma = -D\gamma\,, \qquad D = 3mgl\cos^2\frac{\beta_0}{2}\,.$$

2.a) Na optickém hranolu dochází k dvojímu lomu. Podle obr. R1 platí:

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2,$$

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2,$$

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi\,. \qquad (3)$$



Obr. R1

Ze zákona lomu: $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n$, $\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = n$, odkud

$$\alpha_1 = \arcsin(n\sin\beta_1)\,, \qquad \alpha_2 = \arcsin(n\sin\beta_2) = \arcsin[n\sin(\varphi - \beta_1)].$$

Po dosazení do vztahu (3) dostaneme

$$\delta = \arcsin(n\sin\beta_1) + \arcsin[n\sin(\varphi - \beta_1)] - \varphi\,. \qquad (4)$$

Výraz je definován, jestliže

$$\sin\beta_1 < \frac{1}{n} \quad \text{a současně} \quad \sin(\varphi - \beta_1) = \sin\beta_2 < \frac{1}{n}\,. \qquad (5)$$

Úhly β_1 a β_2 musí být menší než mezní úhel pro daný index lomu n. Pokud paprsek prochází oběma lámavými stěnami, je to splněno.

2 body

b) Hledáme minimum funkce pro $\delta(\beta_1)$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\beta_1} = \frac{n\cos\beta_1}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\beta_1}} - \frac{n\cos(\varphi - \beta_1)}{\sqrt{1 - n^2\sin^2(\varphi - \beta_1)}} = 0\,, \qquad (6)$$

Úpravou dostaneme

$$\cos^2\beta_1[1 - n^2\sin^2(\varphi - \beta_1)] = \cos^2(\varphi - \beta_1)(1 - n^2\sin^2\beta_1),$$

$$\cos^2\beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1) = n^2[\cos^2\beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1)],$$

$$(n^2 - 1)[\cos^2\beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1)] = 0,$$

$$\beta_1 = \varphi - \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{\varphi}{2}\,, \quad \beta_2 = \varphi - \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} = \beta_1\,.$$

Proto také $\alpha_1 = \alpha_2$. Průchod paprsku hranolem je symetrický.

2 body

Pomocí druhé derivace se přesvědčíme, že se jedná o lokální minimum. Platí

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}\,\beta_1^2} = \frac{(n^2-1)n\sin\beta_1}{(1-n^2\sin^2\beta_1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(n^2-1)n\sin(\varphi-\beta_1)}{[1-n^2\sin^2(\varphi-\beta_1)]^{\frac{3}{2}}} > 0\,.$$

1 bod

c) Při symetrickém průchodu paprsku hranolem je

$$\delta_{\min} = 2\alpha_1 - \varphi = 2\arcsin(n\sin\frac{\varphi}{2}) - \varphi\,. \tag{7}$$

1 bod

d) Při symetrickém průchodu paprsku bočními stěnami krystalků ledu je

$$\varphi = 60°\,,\quad \beta_1 = \beta_2 = 30°\,,\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}(\delta_{\min}+\varphi) = 41°\,,$$

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta_{\min}+\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin 41°}{\sin 30°} = 1{,}31\,.$$

2 body

e) Paprsek může procházet symetricky i podstavou a boční stěnou ledového hranolku. V takovém případě je

$$\varphi = 90°\,,\qquad \beta_1 = \beta_2 = 45°\,,\qquad \sin\beta_1 = \sin\beta_2 < \frac{1}{n}\,.$$

Podle (7) je

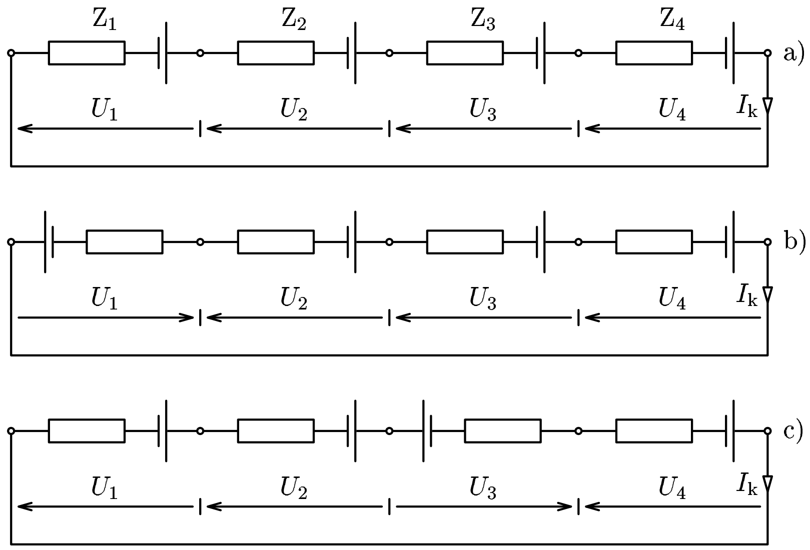
$$\gamma_{\min} = 2\arcsin(n\sin\frac{\varphi}{2}) - \varphi = 2\arcsin(1{,}31\sin 45°) - 90° = 46°.$$

Úhlový poloměr velkého hala je 46°.

2 body

3. a) Celkové napětí na všech čtyřech zdrojích je nulové, neboť volné konce jsou zkratovány přes ampérmetr. Zdroje nemohou být zapojeny podle obr. R3a. V takovém případě by napětí na všech zdrojích bylo stejné, a proto také nulové. Nulové by bylo i napětí na voltmetru. To znamená, že jeden ze zdrojů je otočen a jeho elektromotorické napětí je namířeno proti procházejícímu proudu. Jedná se buď o zdroj Z_1 (obr. R3b) nebo o některý ze zdrojů Z_2 až Z_4, např. zdroj Z_3 (obr. R3c). Kdybychom otočili dva zdroje, celkové elektromotorické napětí by bylo nulové a obvodem by neprocházel proud.

2 body



Obr. R3

V obou zapojeních podle obr. R3b,c je celkové elektromotorické napětí sériově spojených zdrojů $2U_\mathrm{e}$ a celkový vnitřní odpor $4R_\mathrm{i}$. Obvodem prochází proud

$$I_\mathrm{k} = \frac{2U_\mathrm{e}}{4R_\mathrm{i}} = \frac{U_\mathrm{e}}{2R_\mathrm{i}}\,. \tag{8}$$

Úloha má dvě řešení.

I. V zapojení podle obr. R3b je

$$U_1 = U_\mathrm{e} + R_\mathrm{i}I_\mathrm{k} = U_\mathrm{e} + \frac{U_\mathrm{e}}{2} = \frac{3}{2}U_\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad U_\mathrm{e} = \frac{2}{3}U_1 = 2{,}0\ \mathrm{V}\,. \tag{9}$$

Podle (8) je

$$R_i = \frac{U_\mathrm{e}}{2I_\mathrm{k}} = \frac{U_1}{3I_\mathrm{k}} = 0{,}5\ \Omega\,.$$

II. V zapojení podle obr. R3c je

$$U_1 = U_e - R_i I_k = U_e - \frac{U_e}{2} = \frac{1}{2} U_e \quad \Rightarrow \quad U_e = 2U_1 = 6{,}0 \text{ V} . \qquad (10)$$

Podle (8) je

$$R_i = \frac{U_e}{2I_k} = \frac{U_1}{I_k} = 1{,}5 \ \Omega .$$

4 body

b) Příkon spotřebiče připojeného k jedinému zdroji o elektromotorickém napětí U_e a vnitřním odporu R_i je největší, jestliže jeho odpor je stejný jako vnitřní odpor zdroje. V takovém případě

$$P = P_{max} = \frac{U_e^2}{4R_i} .$$

K soustavě zdrojů o celkovém elektromotorickém napětí $2U_e$ a celkovém vnitřním odporu $4R_i$ musíme připojit rezistor o odporu $R = 4R_i$ a jeho příkon bude

$$P = P_{max} = \frac{4U_e^2}{16R_i} = \frac{U_e^2}{4R_i} .$$

I. Pokud je soustava zdrojů zapojena podle obr. R3b, je
$R = 2{,}0 \ \Omega$ a $P_{max} = 2{,}0$ W.

II. Pokud je soustava zdrojů zapojena podle obr. R3c, je
$R = 6{,}0 \ \Omega$ a $P_{max} = 6{,}0$ W.

2 body

c) Po zapojení rezistoru o stejném odporu, jako je celkový vnitřní odpor soustavy zdrojů, zmenší se proud na polovinu, tedy na $I = I_k/2 = 1{,}0$ A.

I. Je-li soustava zapojena podle obr. R3b, změní se napětí na zdroji Z_1 na

$$U_1' = U_e + R_i I = 2{,}5 \text{ V} .$$

II. Je-li soustava zapojena podle obr. R3c, změní se napětí na zdroji Z_1 na

$$U_1' = U_e - R_i I = 4{,}5 \text{ V} .$$

2 body

4. I. Pro periodu kmitů magnetu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mu_0 mH}}\,, \tag{11}$$

kde $J = \frac{1}{12}\pi r^2 l^3 \varrho = 5{,}65 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.

3 body

II. Pro odchylku magnetky platí

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{H_1}{H} = \frac{m}{2\pi R^3\left(1-\Lambda^2\right)^2 H}\,. \tag{12}$$

Ze vztahu (11) určíme mH, ze vztahu (12) m/H. Pak

1 bod

a)

$$m = \frac{2\pi(1-\Lambda^2)}{T}\sqrt{\frac{2\pi R^3 J\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mu_0}} = 10{,}4\ \mathrm{A\cdot m^2}\,.$$

2 body

b)

$$H = \frac{1}{T(1-\Lambda^2)}\sqrt{\frac{2\pi J}{\mu_0 R^3\,\mathrm{tg}\,\varphi}} = 15{,}7\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}\,.$$

2 body

c)

$$n_{\mathrm{celk}} = \frac{m}{\mu_\mathrm{B}} = 1{,}12\cdot 10^{24}\,, \qquad n_{\mathrm{Fe}} = \frac{m}{\mu_\mathrm{B}}\,\frac{M_\mathrm{m}}{\pi r^2 l \varrho N_\mathrm{A}} = 2{,}21\,.$$

2 body