

Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Autoři úloh: J. Blažek (1), V. Vícha (2), P. Šedivý (3, 5, 6), M. Jarešová (4, 6),
B. Vybíral (7)

1. a) Označme F_{t1} třecí sílu mezi válcem a nakloněnou rovinou a F_{t2} třecí sílu mezi kvádrem a nakloněnou rovinou. Pro soustavu v klidu je $F_{t1} = 0$ (v opačném případě by na válec působil nenulový moment síly). Třecí síla F_{t2} je v rovnováze s pohybovými složkami tíhových sil, takže

$$F_{t2} = (m_1 + m_2)g \sin \alpha.$$

Soustava se udrží v klidu, pokud $F_{t2} \leq f m_2 g \cos \alpha$. V opačném případě, tj. pro

$$f < \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \tan \alpha = f_{\max}$$

bude po nakloněné rovině sjíždět. Pro dané hodnoty: $f_{\max} = 0,67$. **3 body**

- b) Vyjdeme z pohybových rovnic pro válec a kvádr v tvaru

$$(m_1 g \sin \alpha - F)r = (J + m_1 r^2) \frac{a}{r},$$

$$m_2 g \sin \alpha + F - f m_2 g \cos \alpha = m_2 a.$$

2 body

Jejich řešením je

$$a = g \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = g \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{\frac{3}{2} m_1 + m_2},$$

$$F = m_2 g \frac{f \left(m_1 + \frac{J}{r^2}\right) \cos \alpha - \frac{J}{r^2} \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = m_1 m_2 g \frac{3f \cos \alpha - \sin \alpha}{3m_1 + 2m_2},$$

(Pro $F > 0$ jsou tyč namáhány tahem, pro $F < 0$ jsou namáhány tlakem.) Pro dané hodnoty: $a = 2,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $F = 2,0 \text{ N}$. **2 body**

- c) Třecí síla F_{t1} mezi válcem a nakloněnou rovinou uděluje válci úhlové zrychlení. Pokud se válec pohybuje bez prokluzování, platí

$$F_{t1} r = J \frac{a}{r}, \quad F_{t1} \leq f m_1 g \cos \alpha.$$

Po úpravě a dosazení dostaneme

$$\frac{J a}{r^2} = \frac{J g [(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha]}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + J} \leq f m_1 g \cos \alpha,$$

$$J(m_1 + m_2) \sin \alpha - J f m_2 \cos \alpha \leq f m_1 (m_1 + m_2) r^2 \cos \alpha + J f m_1 \cos \alpha,$$

$$f \geq \frac{J \sin \alpha}{m_1 r^2 \cos \alpha + J \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\frac{m_1 r^2}{J} + 1} = \frac{\tan \alpha}{3} = f_{\min}.$$

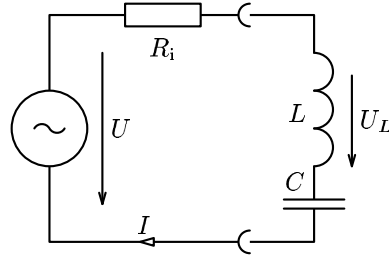
Pro dané hodnoty: $f_{\min} = 0,155$.

3 body

2. a) Vydeme ze schématu na obr. R1. Obvodem prochází proud o efektivní hodnotě $I = U/Z$, kde Z je velikost celkové impedance

$$Z = \sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Obr. R1



Při rezonanci platí

$$X_{L1} = X_C, \quad \omega L_1 = \frac{1}{\omega C}, \quad L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 0,158 \text{ H}.$$

1 bod

- b) Při rezonanci bude obvodem procházet proud $I_{\text{rez}} = \frac{U}{R_i}$ a na cívce bude napětí

$$U_{L\text{rez}} = X_{L1} I_{\text{rez}} = X_C I_{\text{rez}} = \frac{U}{2\pi f R_i C} = 8,0 \text{ V}.$$

1 bod

- c) Napětí U_L na cívce závisí na její indukčnosti podle vztahu

$$U_L = X_L I = \frac{\omega L U}{\sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Maximum této funkce vyšetříme užitím diferenciálního počtu:

$$\begin{aligned} \frac{dU_L}{dL} &= \omega U \frac{\sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \frac{L \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \omega}{\sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\ &= \omega U \frac{R_i^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{L}{C}}{\left[R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Derivace je definována pro libovolné L a pro $L = L_2$ musí být nulová.

$$R_i^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{L_2}{C} = 0, \quad L_2 = C \left(R_i^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2} \right) = 0,168 \text{ H}.$$

Vyšetřením znaménka derivace v okolí L_2 dokážeme, že jde o maximum:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jmenovatel je vždy kladný} \\ \text{Pro } L < L_2 \text{ je čitatel kladný} \\ \text{Pro } L > L_2 \text{ je čitatel záporný} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{v } L_2 \text{ je maximum.}$$

2 body

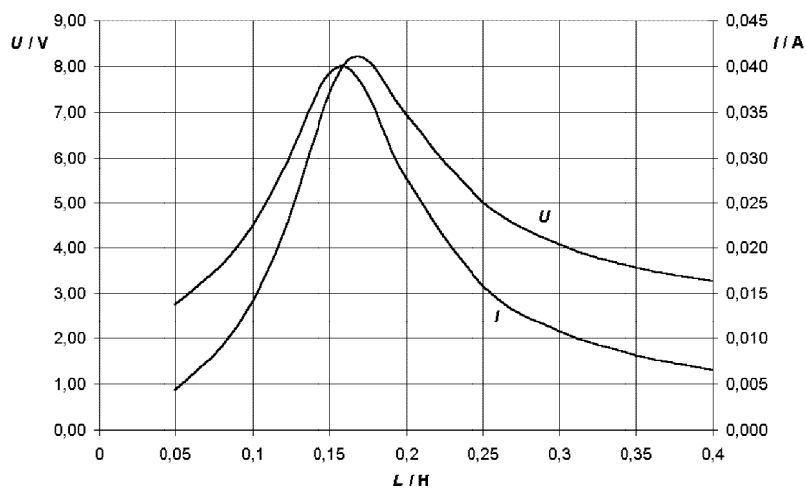
d)

$$U_{L_{max}} = \frac{\omega L_2 U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 8,2 \text{ V.}$$

1 bod

e) Tabulka a graf z EXCELU:

L / H	0,05	0,08	0,1	0,12	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
I / A	0,0138	0,0181	0,0225	0,0288	0,0363	0,0392	0,0400	0,0384	0,0351	0,0276	0,0159	0,0108	0,0081	0,0065
U_L / V	0,967	1,821	2,833	4,345	6,392	7,38	8,035	8,199	7,944	6,941	5,003	4,077	3,576	3,266



3 body

f)

$$U'_{L_{rez}} = \sqrt{R'^2 + (\omega L_1)^2} \frac{U}{R' + R_i} = \frac{U \sqrt{R'^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}}}{R' + R_i} = 7,8 \text{ V.}$$

2 body

3. a) Zahříváme-li vzduch ve vznášejícím se balonu velmi pomalu, je aerostatická vztlaková síla v rovnováze s tíhou balonu:

$$mg + V\rho_i g = V\rho g, \quad m = V(\rho - \rho_i),$$

kde ρ , ρ_i jsou hustoty vzduchu vně a uvnitř balonu. Ze stavové rovnice odvodíme

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M}R, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \quad \text{Po dosazení} \quad m = \frac{VpM}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_i} \right).$$

U země $p = p_0$, $T_i = T_{i0}$

$$mRT_{i0} = p_0VM(T_{i0} - T), \quad T_{i0} = \frac{T}{1 - \frac{mRT}{p_0VM}} = 364,38 \text{ K} \doteq 364 \text{ K}.$$

$t_{i0} \doteq 91^\circ \text{C}$.

3 body

- b) Řešením rovnice

$$dp = -\rho g dh = -\frac{pMg}{RT} dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh$$

dostaneme

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh = -\frac{Mgh}{RT}, \quad \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

3body

- c) Ve výšce h nad zemí platí

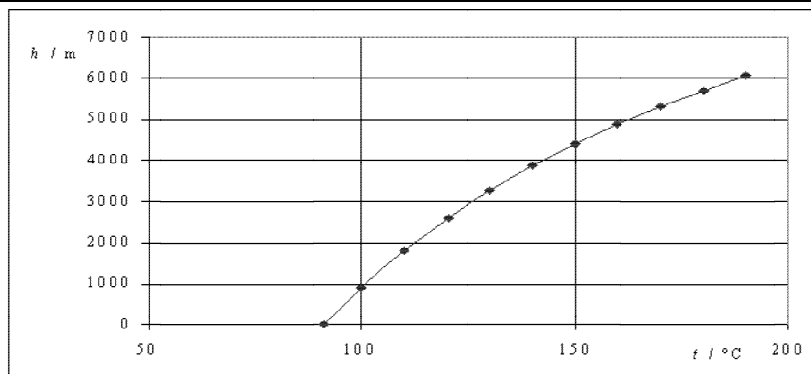
$$m = \frac{Vp_0M}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_i} \right) e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad e^{\frac{Mgh}{RT}} = \frac{p_0VM(T_i - T)}{mRTT_i},$$

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{p_0VM}{mRT} \left(1 - \frac{T}{T_i} \right), \quad \text{kde } T = 300,15 \text{ K}, \quad T_i = (\{t_i\} + 273,15) \text{ K}.$$

Průběh závislosti h na t_i popisuje následující tabulka a graf:

4 body

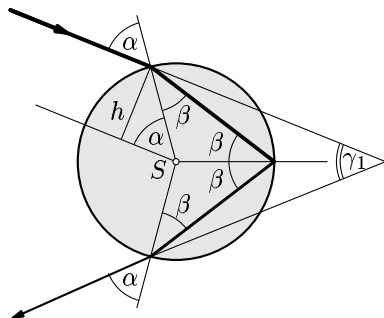
$t_i / ^\circ \text{C}$	91,23	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
h / m	0	915	1 811	2 584	3 260	3 859	4 394	4 875	5 312	5 709	6 074



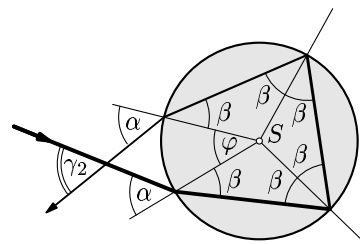
4. a) Z Obr. R2 odvodíme: $\sin \alpha = \frac{h}{r} = H$, $\alpha = \arcsin H$.

Ze zákona lomu: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, $\beta = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) = \arcsin \frac{H}{n}$.

1 bod



Obr. R2



Obr. R3

b) Z obr. R2:

$$\gamma_1 + 2(\alpha - \beta) + 2(180^\circ - \beta) = 360^\circ, \quad \gamma_1 = 4\beta - 2\alpha,$$

Z obr. R3:

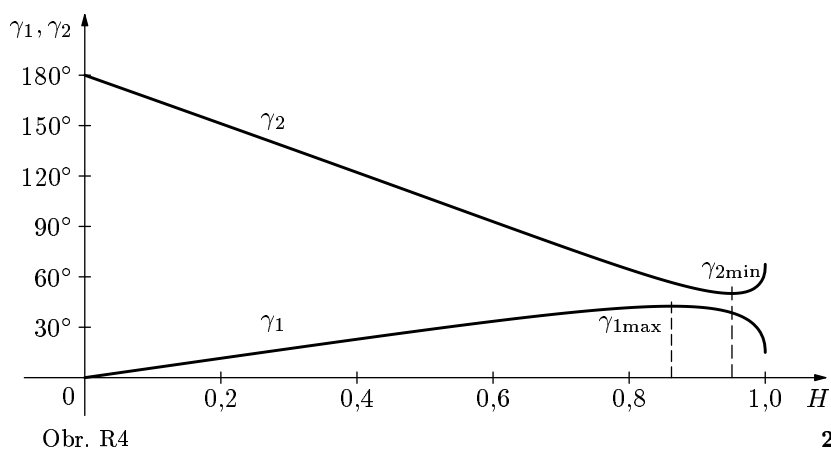
$$\begin{aligned} \varphi &= 360^\circ - 3(180^\circ - 2\beta), & \varphi &= 6\beta - 180^\circ, \\ \gamma_2 + 2(180^\circ - \alpha) + \varphi &= 360^\circ, & \gamma_2 &= 180^\circ + 2\alpha - 6\beta. \end{aligned}$$

2 body

c) Po dosazení vztahů z úlohy a) do b) dostaneme

$$\gamma_1 = 4 \arcsin \frac{H}{n} - 2 \arcsin H, \quad \gamma_2 = 180^\circ + 2 \arcsin H - 6 \arcsin \frac{H}{n}. \quad (1)$$

Pro $n = 1,330$ dostáváme grafy na obr. R4:



Obr. R4

2 body

d) Extrém funkce $\gamma_1(H)$:

$$\frac{d\gamma_1}{dH} = \frac{d}{dH} \left(4 \arcsin \frac{H}{n} - 2 \arcsin H \right) = \frac{4}{\sqrt{n^2 - H^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - H^2}} = 0,$$

$$H = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}. \quad \text{Z grafu v úloze c) je zřejmé, že se jedná o maximum.} \quad (2)$$

Extrém funkce $\gamma_2(H)$:

$$\frac{d\gamma_2}{dH} = \frac{d}{dH} \left(180^\circ + 2 \arcsin H - 6 \arcsin \frac{H}{n} \right) = \frac{2}{\sqrt{1 - H^2}} - \frac{6}{\sqrt{n^2 - H^2}} = 0,$$

$$H = \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}. \quad \text{Z grafu v úloze c) je zřejmé, že se jedná o minimum.} \quad (3)$$

Hodnoty úhlů jsou uvedeny v části e).

2 body

e) Je-li kapka vody osvětlená sluneční světlem rovnoměrně, je rovnoměrné rozložení hodnot záměrného parametru vstupujících paprsků. Soustředění rozptýleného světla určité barvy bude proto největší v tom směru, ve kterém se duhový úhel v závislosti na H mění nejpomaleji, tedy ve směru určeném duhovým úhlem $\gamma_{1\max}$ (primární duha) a ve směru určeném duhovým úhlem $\gamma_{2\min}$ (sekundární duha).

Pro červené světlo je $n = 1,330$. Ze vztahů (2) a (3) vypočítáme:

$$H_{1\epsilon} = 0,862, \quad H_{2\epsilon} = 0,951$$

a dosazením hodnot H do vztahů (1) dostaneme:

$$\gamma_{1\epsilon} = 42^\circ 31', \quad \gamma_{2\epsilon} = 50^\circ 6'.$$

Obdobným postupem vypočítáme pro fialové světlo ($n_f = 1,343$):

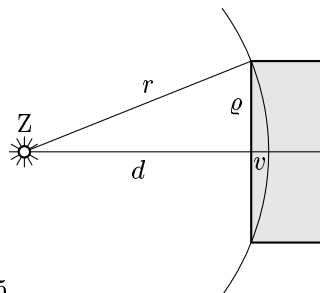
$$H_{1f} = 0,856, \quad H_{2f} = 0,948, \quad \gamma_{1f} = 40^\circ 39', \quad \gamma_{2f} = 53^\circ 29'.$$

Úhlová šířka primární duhy je $\Delta\gamma_1 = 1^\circ 52'$ a sekundární duhy $\Delta\gamma_2 = 3^\circ 23'$.

Barvy v duze tvoří barevné spektrum. Primární duha - směrem zevnitř fialová, modrá, zelená, žlutá, oranžová, červená; sekundární duha - pořadí barev opačné, tj. červená uvnitř, ..., fialová barva vně.

3 body

5. a) Zvolme zářič za střed koule, na které leží obvodová kružnice vstupního okénka detektoru (Obr. R5). Ta na kouli omezuje vrchlík o poloměru ϱ a plošném obsahu $S = 2\pi r v$, kde $r = \sqrt{d^2 + \varrho^2}$ je poloměr koule a $v = r - d = \sqrt{d^2 + \varrho^2} - d$ je výška vrchlíku.



Obr. R5

Celkový tok částic β je tolikrát větší než tok dopadající do detektoru, kolikrát je povrch celé koule S_0 větší než obsah vrchlíku.

3 body

Aktivita zářiče je

$$A = \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{S_0}{S} = \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{4\pi r^2}{2\pi r v} = \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{2\sqrt{d^2 + \varrho^2}}{\sqrt{d^2 + \varrho^2} - d} = 688 \text{ Bq}.$$

4 body

- b) Aktivitu zářiče můžeme vyjádřit jako $A = \lambda N$, kde N je počet atomů nuklidu a $\lambda = \ln 2/T$ je přeměnová konstanta. Z toho

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{AT}{\ln 2} = 8,8 \cdot 10^{11}.$$

Celková hmotnost stroncia je

$$m = NA_r m_u = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ kg}.$$

3 body

7.a) Magnetomotorické napětí

- podle definice $U_m = H_z(2\pi r_0 - 2\delta) + H_v 2\delta$,
- podle zákona celk. proudu $U_m = zI$.

Jedná se o sériový magnetický obvod s konstantním průřezem S , u kterého magnetický indukční tok je konstantní. Proto magnetická indukce ve vzduchové mezeře bude rovna magnetické indukci v železe.

$$\Phi = B_z S = B_v S, \quad B_z = B_v = B.$$

Tedy $\mu_0 H_v = \mu_r \mu_0 H_z = B$, kde μ_r je relativní permeabilita železa příslušná indukci B :

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H_z},$$

přičemž intenzitu H_z pole v železe určíme pro dané B z magnetizační křivky nebo z tabulek: Pro $B = 0,750$ T je $H_z = 120$ A $\cdot$ m⁻¹. Pak $\mu_r = 4,97 \cdot 10^3$ a pro magnetomotorické napětí platí

$$zI = H_z(2\pi r_0 - 2\delta) + H_v 2\delta \approx 2H_z(\pi r_0 + \mu_r \delta).$$

Z toho určíme magnetizační proud

$$I = \frac{2H_z(\pi r_0 + \mu_r \delta)}{z} = 12,1 \text{ A}.$$

5 bodů

b)

$$I_1 = \frac{2H_z \left(\pi r_0 + \mu_r \frac{\delta}{3} \right)}{z} = 4,17 \text{ A}. \quad I_0 = \frac{2H_z}{z} \pi r_0 = 0,188 \text{ A}.$$

2 body

c) Protože ve vzduchové mezeře se nezmění magnetická indukce B , platí

$$F = F_1 = F_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} 2S = \frac{B^2}{\mu_0} \pi r^2 = 141 \text{ N}.$$

3 body