

Řešení úloh regionálního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autorka úloh: R. Horáková (1, 2, 3) a I. Volf (4)

- 1.a) Kdyby koule byla plná, platilo by:

$$F = F_G - F_{vz} = mg - V \varrho_1 g = mg \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho} \right) = 8,54 \text{ N}.$$

Údaj siloměru je menší — koule musí mít dutinu.

3 body

- b) Označíme objem dutiny V_1 , objem celé koule V . Potom platí:

$$m = \varrho(V - V_1), \quad \text{odtud} \quad V = \frac{m}{\varrho} + V_1.$$

V rovnovážném stavu platí:

$$F = mg - V \varrho_1 g = mg - \left(\frac{m}{\varrho} + V_1 \right) \varrho_1 g,$$

4 body

Úpravou vyjádříme V_1 :

$$V_1 = \frac{mg \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho} \right) - F}{g \varrho_1} = 50,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \doteq 51 \text{ cm}^3.$$

Koule je dutá, objem dutiny je 51 cm^3 .

3 body

- 2.a) Během zachycení střely získá kvádr rychlost $\mathbf{v}_1$, jejíž velikost určíme pomocí zákona zachování hybnosti:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_1, \quad v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Pohyb kvádrů se střelou je rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí v_1 . Pro velikost a_1 jeho zrychlení platí:

$$(m_1 + m_2) a_1 = (m_1 + m_2) g (\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad a_1 = g (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Pro okamžitou rychlost platí: $v = v_1 - a_1 t$. Kvádr stoupá, pokud se velikost okamžité rychlosti nezmenší na nulu, tedy po dobu $t_1 = \frac{v_1}{a_1}$. Přitom urazí dráhu

$$s = \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)^2 g (\sin \alpha + f \cos \alpha)}$$

a vystoupí do výšky

$$h = s \sin \alpha = \frac{m_2^2 v_2^2 \sin \alpha}{2(m_1 + m_2)^2 g (\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

4 body

- b) Aby se kvádr po zastavení začal pohybovat směrem dolů, musí být pohybová složka tíhové síly větší než třecí síla, tedy

$$(m_1 + m_2)g \sin \alpha > (m_1 + m_2)gf \cos \alpha, \quad \text{tedy} \quad f < \tan \alpha.$$

2 body

- c) Pohyb kvádru dolů je rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti $a_2 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha$. Dráhu s kvádr proběhne za dobu $t_2 = \sqrt{2s/a_2}$. Celková doba pohybu je

$$t_c = \frac{v_1}{a_1} + \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2)g} \left(\frac{1}{\sin \alpha + f \cos \alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha - f^2 \cos^2 \alpha}} \right).$$

4 body

- 3.a) Během úniku plynu, kdy tlak klesl z hodnoty p_1 na hodnotu p_2 , můžeme předpokládat, že se plyn adiabaticky rozeplnul z objemu V_1 (objem nádoby) na objem V_2 . (Stavové veličiny plynu v nádobě nejsou ovlivněny skutečným stavem plynu, který z nádoby unikl). Platí:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{m}{V_2}}{\frac{m}{V_1}} = \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 0,225 = 22,5 \, \%.$$

Hustota plynu se zmenšila o 22,5 %.

6 bodů

- b) Do konečného stavu se plyn může dostat přímo izotermickým dějem:

$$p_1 V_1 = p_3 V_2, \quad p_3 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 0,775 p_1 = 116 \text{ kPa}.$$

Konečný tlak plynu je 116 kPa.

4 body

Ke stejnému výsledku dojdeme i postupným výpočtem přes adiabatickou expanzi a izochorické ohřátí:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{p_2}{p_1} = 1,107 \cdot 0,7 = 0,775.$$

4.a) Porovnáme údaje o planetce Eros a Zemi:

$$\frac{a^3}{r_z^3} = \frac{T^2}{T_z^2}, \quad a = r_z \left(\frac{T}{T_z} \right)^{\frac{2}{3}} = 1,458 \text{ AU} = 218,1 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

$$e = \varepsilon a = 0,325 \text{ AU} = 48,6 \cdot 10^6 \text{ km},$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = 1,421 \text{ AU} = 212,6 \cdot 10^6 \text{ km},$$

$$r_p = a - e = 1,133 \text{ AU} = 169,5 \cdot 10^6 \text{ km},$$

$$r_a = a + e = 1,783 \text{ AU} = 266,8 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

b) Užitím plošné rychlosti:

$$w = \frac{\pi ab}{T} = \frac{1,457 \cdot 10^{23} \text{ m}^2}{5,556 \cdot 10^7 \text{ s}} = 2,622 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \frac{v_p r_p}{2} = \frac{v_a r_a}{2}.$$

$$v_p = \frac{2w}{r_p} = 30,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_a = \frac{2w}{r_a} = 19,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Užitím vztahu $v = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$:

$$\frac{\kappa M m_z}{r_z^2} = \frac{4\pi^2}{T_z^2} r_z m_z, \quad \kappa M = \frac{4\pi^2 r_z^3}{T_z^2} = 1,327 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2},$$

$$v_p = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\kappa M}{a} \left(\frac{2}{1-\varepsilon} - 1 \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\kappa M}{a} \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 30,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

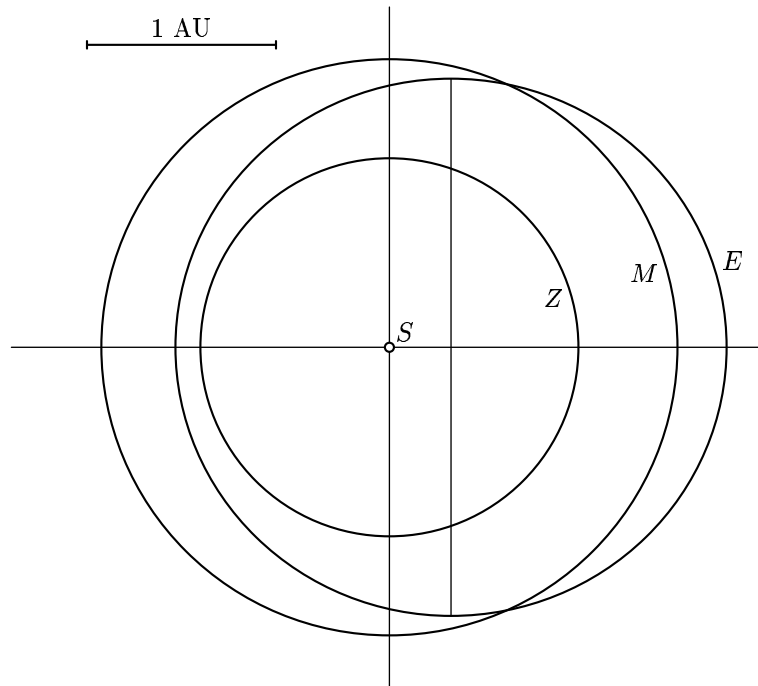
$$v_a = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\kappa M}{a} \left(\frac{2}{1+\varepsilon} - 1 \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\kappa M}{a} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 19,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) Dopolčítáme poloměr trajektorie Marsu:

$$r_m = r_z \left(\frac{T_m}{T_z} \right)^{\frac{2}{3}} = 1,524 \text{ AU} = 228,0 \cdot 10^6 \text{ km} .$$

Trajektorie Země Marsu a Erosu na obr. R1 jsou nakresleny v měřítku 1 AU $\cong$ 25 mm.



Obr. R1