

Řešení úloh 1. kola 42. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Autoři úloh: R. Horáková (1,2,5), J. Houštěk (3), J. Thomas (4),

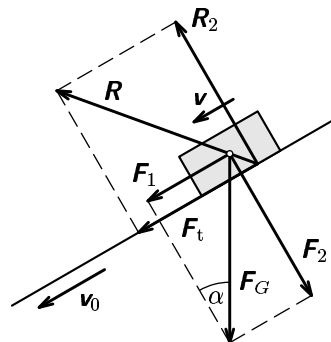
P. Šedivý (6), I. Volf (7)

1. Po přestřižení motouzu působí na cihlu jen tíhová síla $\mathbf{F}_G$ a reakce pásu $\mathbf{R}$ (obr. R1). Jejich složky $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{R}_2$ kolmé k pásu mají stejnou velikost

$$F_2 = R_2 = F_G \cos \alpha$$

a navzájem se ruší. Ve směru rychlosti $\mathbf{v}_0$ působí pás na cihlu třecí silou $\mathbf{F}_t$, která se skládá s pohybovou složkou tíhové síly $\mathbf{F}_1$ ve výslednici o velikosti

$$F = F_1 + F_t = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$



Obr. R1

Ta uděluje cihle zrychlení o velikosti $a = g(\sin \alpha + f \cos \alpha)$, dokud nedosáhne rychlosti pásu $\mathbf{v}_0$. K tomu potřebuje dobu a dráhu

$$t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}, \quad s_0 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

A. Pokud $s_0 \geq l$, $\left(f \leq \frac{v_0^2 - 2gl \sin \alpha}{2gl \cos \alpha}\right)$ dorazí cihla na konec pásu za dobu

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}} \text{ rychlostí } v = \sqrt{2la} = \sqrt{2lg(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

2 body

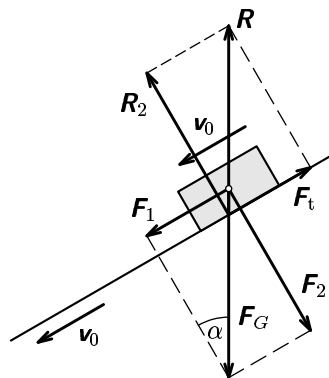
B. Jestliže $s_0 < l$, $\left(f > \frac{v_0^2 - 2gl \sin \alpha}{2gl \cos \alpha}\right)$ závisí další pohyb cihly na velikosti součinitele smykového tření.

B1. Pokud

$$fmg \cos \alpha \geq mg \sin \alpha, \quad (f \geq \tan \alpha)$$

pohybuje se cihla rovnoměrně rychlostí $\mathbf{v}_0$ a síly, které na ni působí, se ve svém účinku ruší (obr. R2). Cihla dorazí na konec pásu za dobu

$$t = t_0 + \frac{l - s_0}{v_0}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$



Obr. R2

B1. Pokud

$$fmg \cos \alpha < mg \sin \alpha, \quad (f < \operatorname{tg} \alpha)$$

nastane situace podle obr. R3. Třecí síla nevykompenzuje úplně pohybovou složku tíhové síly a na cihlu působí výsledná síla o velikosti $F = F_1 - F_t$. Cihla koná rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením o velikosti

$$a' = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Dobu t' po dosažení rychlosti v_0 určíme řešením kvadratické rovnice

$$l - s_0 = v_0 t' + \frac{1}{2} a' t'^2.$$

$$\text{Úloze vyhovuje kořen } t' = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a'(l - s_0)}}{a'}.$$

Celková doba pohybu cihly a její konečná rychlost budou

$$t = t_0 + t', \quad v = v_0 + a' t'.$$

2 body

Číselné řešení:

Pro $f_1 = 0,70$ nastane případ B1.

$$a = 10,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad t_0 = 0,277 \text{ s}, \quad s_0 = 0,415 \text{ m}.$$

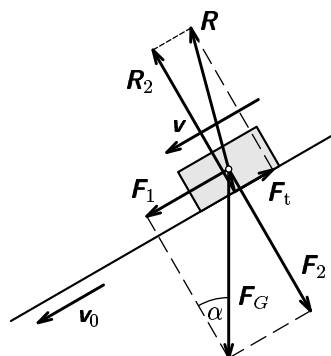
Cihla dorazí na konec pásu za dobu $t = 1,14 \text{ s}$ rychlostí $v = v_0 = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pro $f_2 = 0,40$ nastane případ B2.

$$a = 8,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad t_0 = 0,362 \text{ s}, \quad s_0 = 0,543 \text{ m}, \quad a' = 1,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad t' = 0,697 \text{ s}.$$

Cihla dorazí na konec pásu za dobu $t = 1,06 \text{ s}$ rychlostí $v = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 body



Obr. R3

2. Označení veličin:

perioda kmitů	T
průměr vyčnívající trubice	d
hmotnost hustoměru	m
objem ponořené části v kapalině o hustotě $\varrho_1 = 997 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	V_1
objem ponořené části v kapalině o hustotě $\varrho_2 = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	V_2
objem ponořené části v kapalině o hustotě $\varrho_3 = 1\,100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$..	V_3
délka stupnice	l

- a) V rovnovážné poloze mají vztlaková síla a tíhová síla stejnou velikost. Jestliže okamžitá výchylka hustoměru ve svislém směru je y , rovnováha se poruší. Můžeme-li zanedbat odpor kapaliny proti pohybu, má výsledná síla stejnou velikost jako změna vztlakové síly a opačný směr než výchylka. Její svislá souřadnice je

$$F = \Delta F_v = -\frac{\pi d^2 \varrho_1 g y}{4} = -ky.$$

Konstanta $k = S \varrho_1 g$ má podobný význam jako tuhost pružiny u pružinového oscilátoru. Jsou tedy splněny podmínky pro vznik harmonických kmitů s periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{4m}{\pi d^2 \varrho_1 g}} = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\varrho_1 g}}.$$

4 body

- b) Úpravou předcházejícího vztahu dostaneme:

$$m = \frac{T^2 d^2 \varrho_1 g}{16\pi}, \quad V_1 = \frac{m}{\varrho_1} = \frac{T^2 d^2 g}{16\pi} \doteq 2,47 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \doteq 25 \text{ cm}^3.$$

3 body

- c) Platí: $m = V_1 \varrho_1 = V_2 \varrho_2 = V_3 \varrho_3$. Z toho

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, & V_3 &= V_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_3}, \\ V_2 - V_3 &= \frac{\pi d^2 l}{4} = V_1 \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_3} \right) = \frac{T^2 d^2 g}{16\pi} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_3} \right), \\ l &= \frac{T^2 g}{4\pi^2} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_3} \right) = 0,253 \text{ m} \doteq 25 \text{ cm}. \end{aligned}$$

3 body

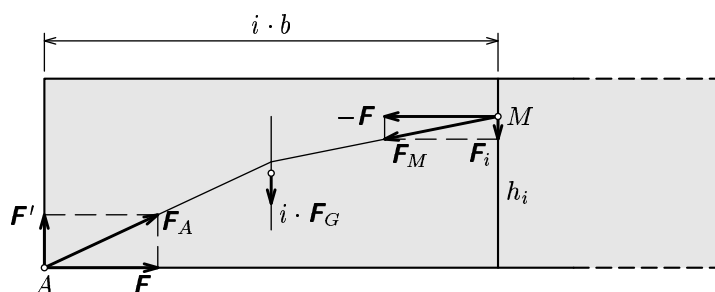
3. Pro celou řadu krychlíček i pro každou její část platí podmínky rovnováhy:

1. Vektorový součet sil působících na těleso musí být nulový.
2. Součet momentů sil působících na těleso musí být nulový vzhledem k libovolné ose.

- a) Na celou řadu krychlíček působí ve svislém směru celková tíhová síla $n \cdot \mathbf{F}_G$ a dvě síly $\mathbf{F}'$ v bodech A a B . Aby nastala rovnováha, musí být

$$F' = \frac{n}{2} F_G = \frac{nb^3 \rho g}{2} = 4,7 \text{ N}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

V dalším řešení vyjdeme z obr. R4. Na prvních i krychlíček se můžeme dívat jako na jediné tuhé těleso, na které působí tíhová síla $i \cdot \mathbf{F}_G$, vnější síla $\mathbf{F}_A$ v bodě A a síla $\mathbf{F}_M$ od $(i + 1)$ -té krychličky, jejíž působíště leží v bodě M ve výšce h_i .



Obr. R4

- b) Vodorovné složky sil působících v bodech A a M se ve svém účinku ruší, jsou proto stejně velké a opačného směru. Každé dvě sousední krychličky na sebe tedy působí ve vodorovném směru silami $\mathbf{F}$ a $-\mathbf{F}$, stejně velkými jako vodorovná složka síly $\mathbf{F}_A$. **1 bod**
- c) Z rovnováhy svislých sil na obr. R4 plyne:

$$F' = iF_G + F_i, \quad F_i = F' - iF_G = \left(\frac{n}{2} - i \right) F_G.$$

Kladné znaménko přitom značí směr dolů, záporné směr nahoru. Podle tohoto vztahu působí největší síla o velikosti $\left(\frac{n}{2} - 1 \right) F_G$ mezi první a druhou krychličkou a mezi poslední a předposlední krychličkou. Zde tedy nejsnáze dojde k proklouznutí. Pro velikost síly $\mathbf{F}$ musí platit

$$f_0 F \geq \left(\frac{n}{2} - 1 \right) F_G, \quad F \geq \frac{n-2}{2f_0} b^3 \rho g = 6,5 \text{ N}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

d) Zvolme osu v bodě A . Podle momentové věty

$$Fh_i = iF_G \frac{ib}{2} + F_i \cdot ib = F_G \left(\frac{n}{2} - \frac{i}{2} \right) ib, \quad h_i = \frac{F_G b}{2F} (n - i)i.$$

Pro sudé n , což je náš případ, je výška zřejmě největší pro $i = n/2$. Pak je

$$h_{\max} = \frac{bn^2 F_G}{8F}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

e) Řada se nejsnáze zlomí uprostřed. Aby k tomu nedošlo, musí platit

$$h_{\max} \leq b, \quad \text{z toho} \quad F \geq \frac{n^2}{8} F_G = \frac{n^2}{8} b^3 \rho g = 23,5 \text{ N} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Toto je v našem případě silnější podmínka než v c). Při postupném zmenšování složky $\mathbf{F}$ tedy dojde ke zlomení řady. Pro krychličky z nějakého kluzkého materiálu by tomu ale mohlo být naopak.

- 4.a) Pro určení polohy těžiště zvolíme vztažnou soustavu podle obr. R5. Těleso můžeme považovat za spojení dvou kvádrů o hmotnostech

$$m_1 = 5m_0, \quad m_2 = 2m_0,$$

kde m_0 je hmotnost jedné krychličky, a těžištích

$$T_1 = \left[\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{5b}{2} \right], \quad T_2 = \left[\frac{b}{2}, 2b, \frac{b}{2} \right].$$

Těžiště celého tělesa má souřadnice

$$x_T = \frac{b}{2} = 20 \text{ mm},$$

$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{7m_0} = \frac{13}{14}b = 37,1 \text{ mm},$$

$$z_T = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{7m_0} = \frac{27}{14}b = 7,1 \text{ mm}.$$

2 body

- b) Nejsnáze povalíme těleso na bok silou působící na horní hranu nejvyšší krychličky podle obr. R6. Z momentové věty plyne

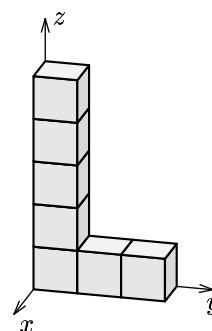
$$F_{\min} \sqrt{(5b)^2 + b^2} = F_G \frac{b}{2},$$

$$F_{\min} = \frac{F_G}{2\sqrt{26}} = \frac{7b^3 \rho g}{2\sqrt{26}} = 0,323 \text{ N}.$$

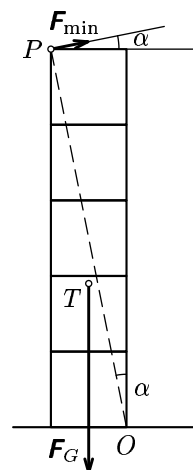
Síla musí působit šikmo vzhůru.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{5b} = 0,2, \quad \alpha = 11,3^\circ.$$

2 body



Obr. R5



Obr. R6

Úlohy c) až e) vyřešíme z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s automobilem. Ve všech třech případech na těleso působí setrvačná síla, jejíž působíště je v těžišti. Moment M_s setrvačné síly vzhledem k podstavě hraně, okolo které by mělo dojít k překlpení, musí překročit moment M tíhové síly vzhledem k téže ose, ale velikost setrvačné síly F_s musí zůstat menší než velikost maximální třecí síly, která může vzniknout mezi tělesem a podlahou automobilu $F_{\max} = f_0 mg = 0,70mg$.

- c) Při rozjíždění je $M_s = M$, jestliže

$$ma \cdot z_T = mg \cdot y_T, \quad a = g \frac{y_T}{z_T} = g \frac{13}{27} = 4,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Přitom $F_s = 0,48mg < f_0mg$. Překročíme-li zrychlení $4,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, skácí se těleso dozadu.

2 body

- d) Na kruhovém objezdu o poloměru r působí na těleso setrvačná odstředivá síla. Rovnost $M_s = M$ nastane, jestliže

$$\frac{mv^2}{r} z_T = mg x_T, \quad v^2 = \frac{gr x_T}{z_T} = \frac{7}{27} gr,$$

$$v = \sqrt{\frac{7}{27} gr} = 7,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 26 \text{ km/h}.$$

2 body

- e) Při brzdění dosáhneme rovnosti $M_s = M$, jestliže

$$ma' z_T = mg(3b - y_T), \quad a' = \frac{3b - y_T}{z_T} g = \frac{29}{27} g = 10,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

V takovém případě $F_s = \frac{29}{27} mg > f_0 mg$.

Těleso se neskácí, ale začne klouzat dopředu, jakmile velikost zrychlení překročí hodnotu $f_0 g = 6,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2 body

$$5.a) \quad p_2 = p_3 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = 4,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad T_3 = T_4 = T_1 \frac{V_3}{V_2} = 2,8 T_1 = 840 \text{ K},$$

$$p_4 = \frac{p_3 V_3}{V_4} = 2,80 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$U_1 = U_2 = 2,5 n R_m T_1 = 2,5 p_1 V_1 = 2,5 \text{ kJ}, \quad U_3 = U_4 = U_1 \frac{T_3}{T_1} = 7,0 \text{ kJ}.$$

3 body

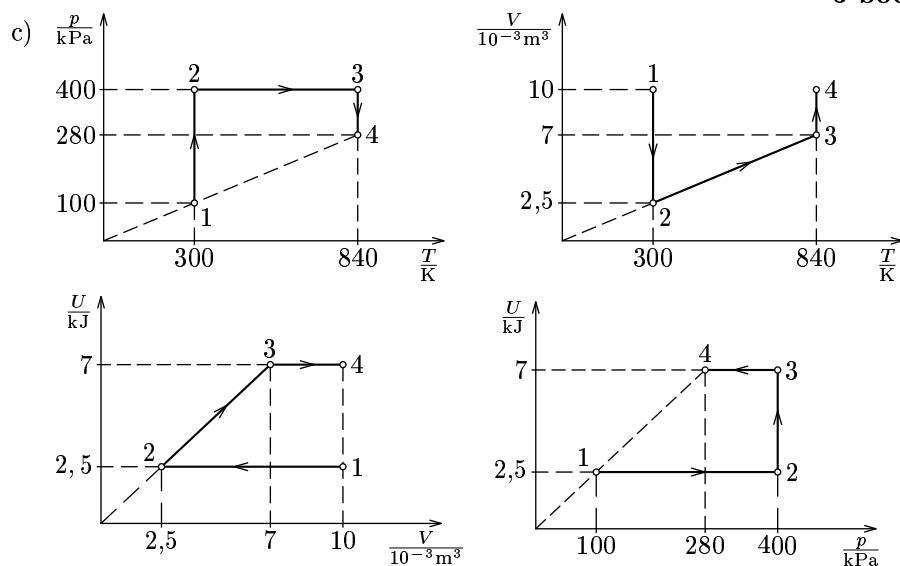
- b) Plyn koná práci, jestliže se rozpíná, tedy v úsecích 2-3 a 3-4.
Plyn odevzdává teplo do okolí při ději 1-2, kdy spotřebovává práci a jeho vnitřní energie se přitom nemění.

$$Q'_{12} = W_{12} = n R_m T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \doteq 1,4 \text{ kJ},$$

$$W'_{23} = p_2 (V_3 - V_2) = p_2 \cdot 0,45 V_1 = 1,8 \text{ kJ},$$

$$W'_{34} = Q_{34} = n R_m T_3 \ln \frac{V_4}{V_3} = p_3 V_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \doteq 1,0 \text{ kJ},$$

3 body



4 body

- 7.a) Vzdálenost r_v Venuše od Slunce určíme z trojúhelníku SZV na obr. R7:

$$r_v = r_z \sin \alpha = 0,7234 \text{ AU} = 108,2 \cdot 10^6 \text{ km} . \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- b) Úhlová rychlost Venuše podle pozorovatele na Zemi je $\omega_{\text{syn}} = \omega_v - \omega_z$, z čehož po substituci $\omega = 2\pi/T$ a úpravě dostaneme

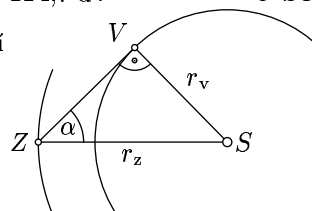
$$T_v = \frac{T_{\text{syn}} T_z}{T_{\text{syn}} + T_z} = 0,6152 \text{ roku} = 224,7 \text{ d} . \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Pro dostředivou sílu působící na planetu platí

$$F_d = \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = \varkappa \frac{M m}{r^2} .$$

Z toho úpravou dostaneme pro obě planety:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2} \doteq 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} .$$



Obr. R7

2 body

- d) Platnost 3. Keplerova zákona ověříme porovnáním:

$$\frac{r_v^3}{T_v^2} = \frac{r_z^3}{T_z^2} \doteq 3,4 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- e) Velká poloosa eliptické dráhy sondy má délku

$$a = \frac{r_v + r_z}{2} = 128,9 \cdot 10^6 \text{ km} .$$

Z 3. Keplerova zákona odvodíme: $T_{\text{sondy}} = T_z \sqrt{\frac{a^3}{r_z^3}} = 292 \text{ d}$

a doba přiblížení sondy k Venuši je

$$t = \frac{T_{\text{sondy}}}{2} = 146 \text{ d} . \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- f) Zorné úhly Slunce vzhledem k Zemi a vzhledem k Venuši jsou

$$\alpha_z = \frac{2R}{r_z} , \quad \alpha_v = \frac{2R}{r_v} .$$

Po úpravě

$$\alpha_v = \alpha_z \frac{r_z}{r_v} = 44,2' . \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$