Řešení úloh 1. kola 42. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*
Autoři úloh: M. Randa (1, 2, 3, 4, 5, 7), K. Rauner (6)

1. a) Při pootočení horní polokoule v sestavě podle obr. 1a o úhel 2φ (obr. R1) se změní souřadnice bodu D dotyku obou polokoulí, souřadnice středu S rovné plochy horní polokoule a souřadnice těžiště T horní polokoule:

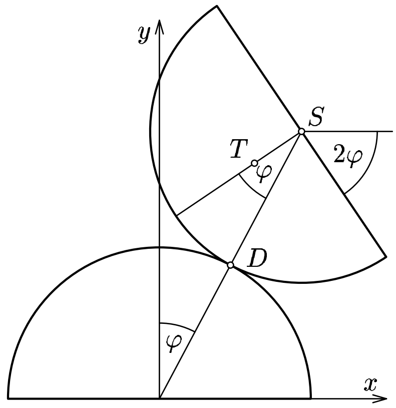
$$D = [R\sin\varphi; R\cos\varphi]\,, \qquad S = [2R\sin\varphi; 2R\cos\varphi]\,,$$

$$T = \left[2R\sin\varphi - \frac{3}{8}R\sin(2\varphi); 2R\cos\varphi - \frac{3}{8}R\cos(2\varphi)\right]\,.$$

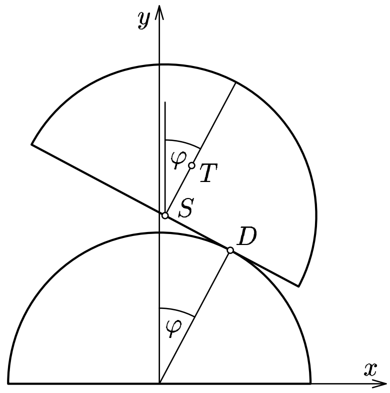
Porovnáme x-ové souřadnice bodů D a T:

$$\frac{x_T}{x_D} = \frac{2R\sin\varphi - \frac{3}{8}Rsin(2\varphi)}{R\sin\varphi} = 2 - \frac{3}{4}\cos\varphi\,.$$

Pro malé úhly φ je $\cos\varphi \doteq 1$, proto $\frac{x_T}{x_D} \doteq \frac{5}{4} > 1$.
Moment tíhové síly působící na horní polokouli vzhledem k bodu D způsobí další otáčení z rovnovážné polohy. Jedná se o rovnovážnou polohu *labilní*. **2 body**



Obr. R1



Obr. R2

Při pootočení horní polokoule v sestavě podle obr. 1b o úhel φ (obr. R2) budou souřadnice bodu D dotyku obou polokoulí, souřadnice středu S rovné plochy horní polokoule a souřadnice těžiště T horní polokoule:

$$D = [R\sin\varphi; R\cos\varphi]\,, \qquad S = [R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi; R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi]\,,$$

$$T = \left[\frac{11}{8}R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi; \frac{11}{8}R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi\right]\,.$$

Porovnáme x-ové souřadnice bodů D a T:

$$\frac{x_T}{x_D} = \frac{\frac{11}{8}R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi}{R\sin\varphi} \doteq \frac{11}{8} - 1 = \frac{3}{8} < 1\,,$$

protože pro malé úhly φ je $\sin\varphi \doteq \varphi$ a $\cos\varphi \doteq 1$.
Moment tíhové síly působící na horní polokouli vzhledem k bodu D způsobí návrat do rovnovážné polohy. Jedná se o rovnovážnou polohu *stabilní.* **3 body**

b) Změníme-li v sestavě podle obr. R1 poloměr horní polokoule na R', nastane po jejím vychýlení situace, kterou vidíme na obr. R3. Platí:

$$R\varphi = R'\alpha\,, \qquad D = [R\sin\varphi; R\cos\varphi]\,, \qquad S = [(R+R')\sin\varphi; (R+R')\cos\varphi]\,,$$

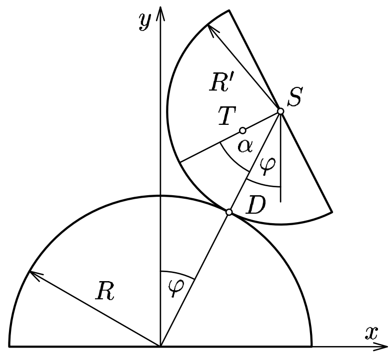
$$T = \left[(R+R')\sin\varphi - \frac{3}{8}R'\sin(\varphi+\alpha); (R+R')\cos\varphi - \frac{3}{8}R\cos(\varphi+\alpha)\right]\,,$$

$$\frac{x_T}{x_D} = \frac{(R+R')\sin\varphi - \frac{3}{8}R'\sin(\varphi+\alpha)}{R\sin\varphi}\,.$$

Pro malé úhly

$$\frac{x_T}{x_D} \doteq \frac{(R+R')\varphi - \frac{3}{8}R'\varphi\left(1+\frac{R}{R'}\right)}{R\varphi}\,,$$

$$\frac{x_T}{x_D} \doteq \frac{5}{8}\left(1+\frac{R'}{R}\right)\,.$$



Obr. R3

Rovnost $x_T \doteq x_D$ nastane pro $R' = \frac{3}{5}R$.

Pro $R' < \frac{3}{5}R$ je poloha *stabilní*, pro $R' \geq \frac{3}{5}R$ je poloha *labilní.* **3 body**

c) Změníme-li v sestavě podle obr. R2 poloměr horní polokoule na R', bude platit:

$$D = [R\sin\varphi; R\cos\varphi]\,, \qquad S = [R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi; R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi]\,,$$

$$T = \left[R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi + \frac{3}{8}R'\sin\varphi; R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + \frac{3}{8}R'\cos\varphi\right]\,,$$

$$\frac{x_T}{x_D} = \frac{R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi + \frac{3}{8}R'\sin\varphi}{R\sin\varphi} \doteq 1 - 1 + \frac{3}{8}\frac{R'}{R} = \frac{3}{8}\frac{R'}{R}\,.$$

Pro $R' < \frac{8}{3}R$ je poloha *stabilní*, pro $R' \geq \frac{8}{3}R$ je poloha *labilní.* **2 body**

2. Řešení z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě:

Na tělísko působí pouze tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce nádoby $\boldsymbol{R}$. Jejich výslednice je dostředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$, která udržuje tělísko na kruhové trajektorii. Tečná složka reakce $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ je třecí síla, kterou působí nádoba na tělísko. V mezním případě platí $F_\mathrm{t} = fR_2$.

a) Při minimální úhlové rychlosti nastane situace podle obr. R4. Porovnáním složek sil rovnoběžných s tečnou rovinou a složek kolmých k tečné rovině dostaneme:

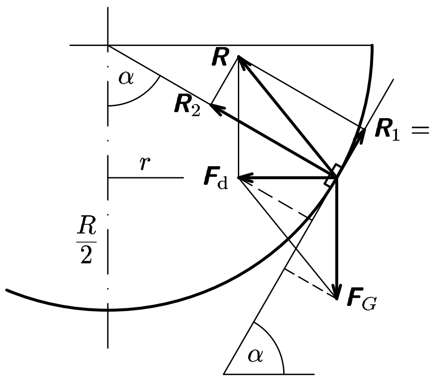
$$F_\mathrm{d}\cos\alpha = F_G\sin\alpha - R_1\,, \qquad F_\mathrm{d}\sin\alpha = R_2 - F_G\cos\alpha\,,$$

$$R_1 = fR_2 \;\Leftrightarrow\; F_G\sin\alpha - F_\mathrm{d}\cos\alpha = f(F_G\cos\alpha + F_\mathrm{d}\sin\alpha)\,,$$

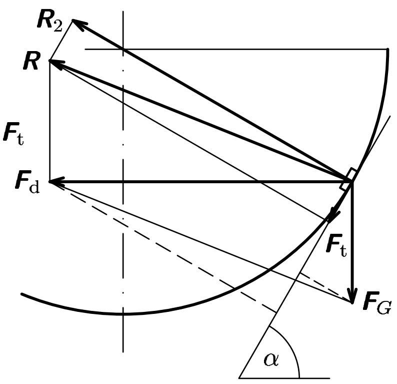
$$F_\mathrm{d} = m\omega_\mathrm{min}^2 r = mg\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha}\,, \qquad r = R\sin\alpha\,, \quad \alpha = \arccos\frac{0{,}5R}{R} = 60^\circ\,,$$

$$\omega_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{R\sin\alpha(\cos\alpha + f\sin\alpha)}} \doteq 5{,}07\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

4 body



Obr. R4



Obr. R5

b) Při maximální úhlové rychlosti nastane situace podle obr. R5. Platí:

$$F_\mathrm{d}\cos\alpha = F_G\sin\alpha + R_1\,, \qquad F_\mathrm{d}\sin\alpha = R_2 - F_G\cos\alpha\,,$$

$$\omega_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{R\sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)}} \doteq 8{,}17\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

4 body

c) Při úhlové rychlosti $\overline{\omega} = \dfrac{\omega_\mathrm{min} + \omega_\mathrm{max}}{2} = 6{,}62\ \mathrm{s}^{-1}$ je

$$F_\mathrm{d}\cos\alpha = m\overline{\omega}^2 R\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}0949\ \mathrm{N} > F_G\sin\alpha = 0{,}0849\ \mathrm{N}\,.$$

Třecí síla proto působí na tělísko stejným směrem jako v případu b), tedy šikmo dolů, a má velikost

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{d}\cos\alpha - F_G\sin\alpha = 0{,}010\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

3. a) Objem vody po nalití do nádoby zanedbáme. Tlak vzduchu po zahřátí z teploty $t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ na teplotu $t_2 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$ se zvětší na

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 1 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot \frac{373\ \mathrm{K}}{293\ \mathrm{K}} = 1{,}27 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

Samotné vodní páry budou mít po úplném odpaření vody tlak

$$p' = \frac{mRT_2}{M_\mathrm{m} V} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 373}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2}}\ \mathrm{Pa} = 52\ \mathrm{kPa}\,,$$

menší než tlak sytých par při teplotě $100\ ^\circ\mathrm{C}$, který je $p_\mathrm{s} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa. Celkový tlak v nádobě bude $p = p_2 + p' = 1{,}79 \cdot 10^5$ Pa.

5 bodů

b) Kdyby se do objemu 10 l odpařilo 10 g vody, měly by samotné vodní páry tlak $1{,}72 \cdot 10^5$ Pa, což je více než p_s. K úplnému odpaření vody tedy nedojde a v nádobě vzniknou syté vodní páry. Celkový tlak v nádobě bude $p = p_2 + p_\mathrm{s} = 2{,}28 \cdot 10^5$ Pa.

5 bodů

4. Velikost rychlosti, se kterou dopadne plastelína na misku, je $v' = \sqrt{2gh}$. Dojde k dokonale nepružnému rázu. Bezprostředně po něm se bude miska i s plastelínou pohybovat počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ směrem dolů a začne kmitat kolem nové rovnovážné polohy, která je níže o $\Delta l = mg/k$. Velikost počáteční rychlosti určíme užitím zákona zachování hybnosti:

$$mv' = (m+M)v_0\,, \qquad |\boldsymbol{v}_0| = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}\,.$$

Kmity misky s plastelínou popíšeme ve vztažné soustavě, jejíž počátek je v nové rovnovážné poloze misky. Počáteční podmínky jsou tedy:

$$y_0 = \Delta l = \frac{mg}{k} = 0{,}1225\ \mathrm{m}\,, \qquad v_0 = -\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m} = -0{,}852\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Úhlová frekvence a perioda kmitů jsou:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = 6{,}67\ \mathrm{s^{-1}}\,, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}942\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

Amplitudu kmitů určíme užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 + \frac{1}{2}(M+m)v_0^2\,,$$

$$y_\mathrm{m} = \sqrt{y_0^2 + \frac{(M+m)v_0^2}{k}} = y_0\sqrt{1 + \frac{2hk}{g(M+m)}} = 0{,}177\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

Zbývá vypočítat amplitudu rychlosti, amplitudu zrychlení a počáteční fázi:

$$v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = 1{,}18\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad a_\mathrm{m} = \omega^2 y_\mathrm{m} = 7{,}87\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,,$$

$$y_0 = y_\mathrm{m}\sin\varphi_0\,, \quad v_0 = \omega y_\mathrm{m}\cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{y_0\omega}{v_0}\,,$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{\dfrac{mg}{k}\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}}{-\dfrac{m}{M+m}\sqrt{2gh}} = -\sqrt{\frac{(M+m)g}{2hk}}\,, \qquad \varphi_0 = 136{,}2^\circ = 2{,}38\ \mathrm{rad}\,.$$

2 body

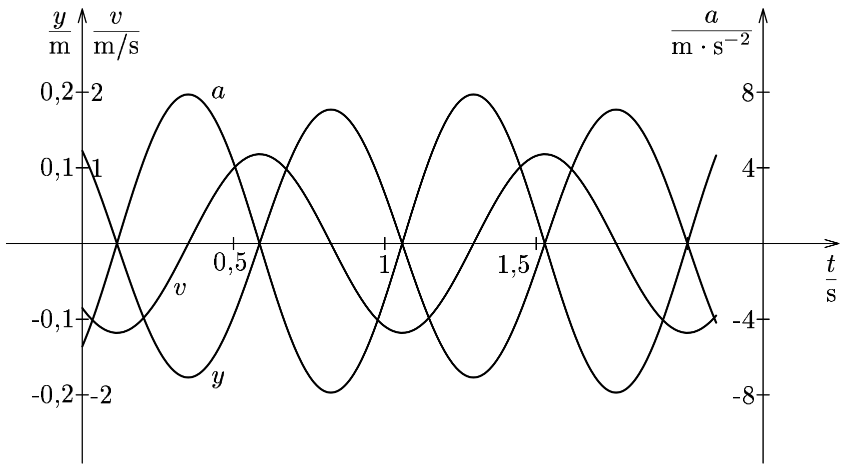
Časový průběh kmitů je popsán rovnicemi:

$$y = y_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad \{y\} = 0{,}177 \sin(6{,}67\{t\} + 2{,}38)\,,$$

$$v = v_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad \{v\} = 1{,}18 \cos(6{,}67\{t\} + 2{,}38)\,,$$

$$a = -a_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad \{a\} = -7{,}87 \sin(6{,}67\{t\} + 2{,}38)\,.$$

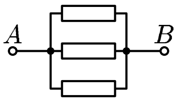
2 body



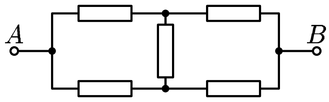
2 body

5. a) Obvod z obr. 3a můžeme překreslit podle obr. R6. Výsledný odpor je $R_{AB} = R/3$.
1 bod

b) Obvod z obr. 3b můžeme překreslit podle obr. R7. Výsledný odpor je $R_{AB} = R$.
2 body



Obr. R6



Obr. R7

c) Řešení užitím Kirchhoffových zákonů: Připojíme-li k bodům A, B zdroj o napětí U, budou proudy v síti rozloženy podle obr. R8. Platí:

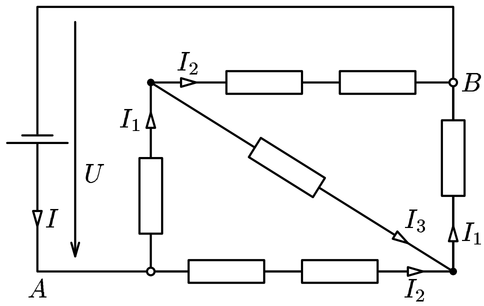
$$I_3 = I_1 - I_2 ,$$

$$RI_1 + R(I_1 - I_2) = 2RI_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{3}{2} I_2 ,$$

$$U = RI_1 + 2RI_2 = \frac{7}{2} RI_2 ,$$

$$R_{AB} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{\frac{7}{2} RI_2}{\frac{5}{2} I_2} = \frac{7}{5} R .$$



Obr. R8

3 body

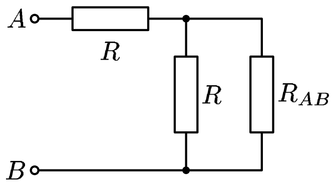
d) Odstraníme-li z řetězce první dva rezistory, jeho celkový odpor se nezmění. Můžeme tedy vycházet z náhradního zapojení na obr. R9. Platí:

$$R_{AB} = R + \frac{R \cdot R_{AB}}{R + R_{AB}} ,$$

$$R_{AB}^2 - R \cdot R_{AB} - R^2 = 0 .$$

Úloze vyhovuje kořen

$$R_{AB} = R \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}62 R .$$



Obr. R9

4 body

7. a) Řešení užitím zákona zachování energie:
Vychýlíme-li těžiště válce (prstence, koule) z rovnovážné polohy do vzdálenosti y_m od roviny souměrnosti, zvedne se do výšky $h = (R-r) - \sqrt{(R-r)^2 - y_\mathrm{m}^2}$ (obr. R6). Při návratu do rovnovážné polohy se bude těžiště pohybovat rychlostí $\boldsymbol{v}_\mathrm{m}$ a válec (prstenec, koule) se bude otáčet úhlovou rychlostí $\Omega = v_\mathrm{m}/r$.
Podle ZZE:

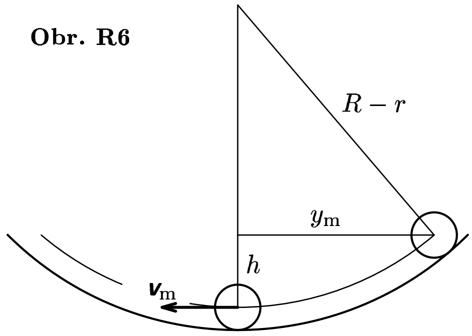
$$mgh = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 + \frac{1}{2}J\Omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)v_\mathrm{m}^2 .$$

Jestliže $y_\mathrm{m} \ll R$, bude těleso konat harmonické kmity, přičemž

$$h \doteq (R-r)\left[1 - \left(1 - \frac{y_\mathrm{m}^2}{2(R-r)^2}\right)\right] = \frac{y_\mathrm{m}^2}{2(R-r)},$$

$$v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = \frac{2\pi y_\mathrm{m}}{T} .$$

Obr. R6



Po dosazení dostaneme

$$\frac{mgy_\mathrm{m}^2}{2(R-r)} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\omega^2 y_\mathrm{m}^2 ,$$

$$\omega^2 = \frac{mg}{(R-r)\left(m + \dfrac{J}{r^2}\right)},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\left(m + \dfrac{J}{r^2}\right)}{mg}} = \begin{cases} 2\pi\sqrt{\dfrac{2(R-r)}{g}} & \text{pro prstenec,} \\ 2\pi\sqrt{\dfrac{3(R-r)}{2g}} & \text{pro válec,} \\ 2\pi\sqrt{\dfrac{7(R-r)}{5g}} & \text{pro kouli.} \end{cases}$$

Nejkratší periodu má koule, nejdelší prstenec. **6 bodů**

b) Matematické kyvadlo délky R by kmitalo s periodou $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$. Aby doby kmitu těles v korytu byly stejné, musí platit:

$$R = 2(R-r), \quad r = \frac{R}{2} \quad \text{pro prstenec}$$
$$R = \frac{3}{2}(R-r), \quad r = \frac{R}{3} \quad \text{pro válec}$$
$$R = \frac{7}{5}(R-r), \quad r = \frac{2R}{7} \quad \text{pro kouli}$$

4 body