

Řešení teoretických úloh celostátního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

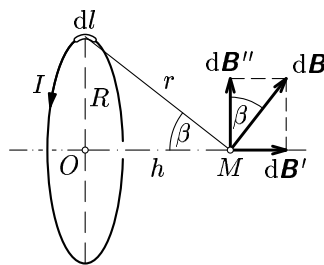
Autoři úloh: P. Šedivý (1, 2, 3), B. Vybíral (4)

- 1.a) Nejprve určíme magnetickou indukci $\mathbf{B}_1$ pole jediného závitu o poloměru R , kterým prochází proud I , na jeho ose ve vzdálenosti h od středu (obr R1). Proudový element délky dl budí pole o indukci $d\mathbf{B}$, ze které se uplatní jen složka $d\mathbf{B}'$ ve směru osy, jejíž velikost je

$$|d\mathbf{B}'| = \frac{\mu_0 I dl \sin \beta}{4\pi r^2}.$$

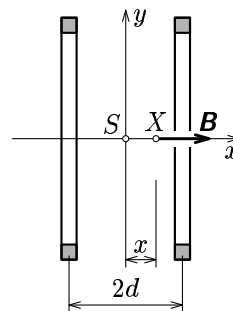
Integrací dostaneme

$$B_1 = \frac{\mu_0 I \sin \beta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \sin \beta}{4\pi r^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$



Obr. R1

Kruhová cívka o N závitěch vyvolá ve stejném bodě magnetické pole o indukci N krát větší. Na ose Helmholtzových cívek je velikost výsledné indukce rovna součtu indukcí obou cívek. Zvolíme-li vztažnou soustavu podle obr. R2, je velikost magnetické indukce na ose v bodě o souřadnici x



Obr. R2

$$B = \frac{N\mu_0 I R^2}{2} \left\{ [R^2 + (d-x)^2]^{-\frac{3}{2}} + [R^2 + (d+x)^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

4 body

- b) Má-li být magnetické pole v okolí bodu S co nejhomogennější, musí být graf funkce, kterou jsme obdrželi řešením úkolu a), v bodě $x = 0$ co nejrovnější. Její druhá derivace musí být nulová (*inflexní bod*). Stačí ovšem derivovat výraz ve složené závorce, který označíme symbolem V :

$$\frac{dV}{dx} = 3 \left\{ [R^2 + (d-x)^2]^{-\frac{5}{2}} (d-x) - [R^2 + (d+x)^2]^{-\frac{5}{2}} (d+x) \right\} ,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 15 \left\{ [R^2 + (d-x)^2]^{-\frac{7}{2}} (d-x)^2 + [R^2 + (d+x)^2]^{-\frac{7}{2}} (d+x)^2 \right\} -$$

$$- 3 \left\{ [R^2 + (d-x)^2]^{-\frac{5}{2}} + [R^2 + (d+x)^2]^{-\frac{5}{2}} \right\} .$$

Pro $x = 0$:

$$30(R^2 + d^2)^{-\frac{7}{2}} d^2 - 6(R^2 + d^2)^{-\frac{5}{2}} = 6(R^2 + d^2)^{-\frac{7}{2}} (5d^2 - R^2 - d^2) = 0 ,$$

Řešením je $R^2 = 4d^2$, $R = 2d$, což jsme měli dokázat.

4 body

c) V bodě S platí

$$B_0 = \frac{N\mu_0 I R^2}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} . \quad \text{Z toho} \quad I = \frac{B_0 (R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}{N\mu_0 R^2} .$$

Pro dané hodnoty $I = 16,7$ A.

2 body

- 2.a) Po překlopení přepínače začne obvodem procházet proud ve směru vyznačeném na obr. R3. Dioda, pro kterou je to propustný směr, se neuplatní. Dostali jsme netlumený kmitavý obvod LC tvořený cívkou o indukčnosti L a sériovou kombinací kondenzátorů o celkové kapacitě

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

ve kterém proběhne jedna polovina kmitu o periodě, kterou určíme pomocí Thomsonova vztahu $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Druhá polovina kmitu se už neuskuteční, protože tomu zabrání dioda, která přejde do nevodivého stavu. Přechodný děj tedy proběhne za dobu

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{LC} = \pi\sqrt{\frac{LC_1 C_2}{C_1 + C_2}}.$$

1,5 bodu

Podrobnější odvození: Označme q_1 , q_2 okamžité náboje na kondenzátorech. V obvodu platí

$$u_1 = u_L + u_2, \quad i = -\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt}, \quad \frac{q_1}{C_1} = L\frac{di}{dt} + \frac{q_2}{C_2}, \quad -\frac{i}{C_1} = L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C_2},$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2} i = 0.$$

Řešením této rovnice za počáteční podmínky $i = 0$ je

$$i = I_m \sin \omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}}.$$

- b) Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}C_1 U^2 = \frac{(C_1 U - Q)^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2}, \quad Q^2 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 2UQ,$$

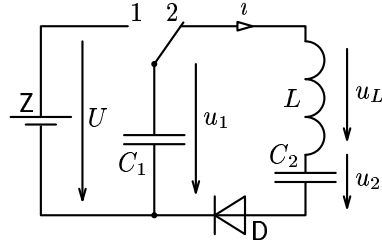
$$Q = U \frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad U_1 = U - \frac{Q}{C_1} = U \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} = U \frac{2C_1}{C_1 + C_2}.$$

1,5 bodu

Diskuse:

- a) $C_1 \gg C_2$: $U_1 \rightarrow U, \quad U_2 \rightarrow 2U,$
- b) $C_1 > C_2$: $U > U_1 > 0, \quad 2U > U_2 > U,$
- c) $C_1 = C_2$: $U_1 = 0, \quad U_2 = U,$
- d) $C_1 < C_2$: $-U < U_1 < 0, \quad 0 < U_2 < U,$
- e) $C_1 \ll C_2$: $U_1 \rightarrow -U, \quad U_2 \rightarrow 0.$

1 bod



Obr. R3

Během přechodného děje se náboj na druhém kondenzátoru postupně zvětšuje:

$$q_2 = \int_0^t I_m \sin \omega t \, dt = \frac{I_m}{\omega} (1 - \cos \omega t),$$

až v čase $t = T/2$ dosáhne hodnoty

$$Q = \frac{2UC_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2I_m}{\omega} = 2I_m \sqrt{\frac{LC_1C_2}{C_1 + C_2}}. \quad \text{Z toho} \quad I_m = U \sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1 + C_2)}}.$$

2 body

c) Časové průběhy napětí popisují vztahy

$$u_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{I_m}{\omega C_2} (1 - \cos \omega t) = \frac{UC_1}{C_1 + C_2} (1 - \cos \omega t) = \frac{U_2}{2} (1 - \cos \omega t),$$

$$u_1 = U - \frac{q_2}{C_1} = U - \frac{I_m}{\omega C_1} (1 - \cos \omega t) = U - U \frac{C_2}{C_1 + C_2} (1 - \cos \omega t).$$

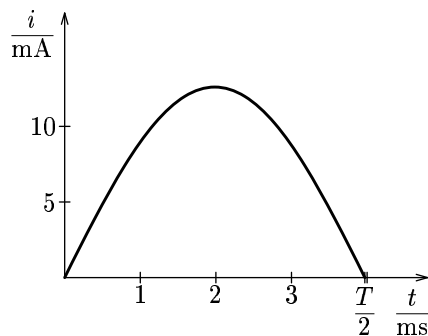
1 bod

Pro dané hodnoty vychází:

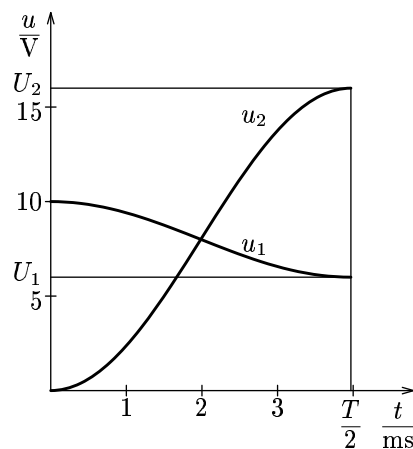
$$\frac{T}{2} = 3,97 \text{ ms}, \quad I_m = 12,6 \text{ mA}, \quad Q = 32 \text{ } \mu\text{C}, \quad U_1 = 6 \text{ V}, \quad U_2 = 16 \text{ V}.$$

1 bod

Časové průběhy proudu a obou napětí jsou graficky znázorněny na obr. R4 a R5.



Obr. R4



Obr. R5

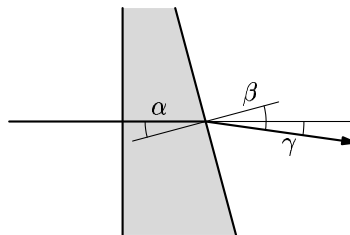
2 body

3. V horní polovině dvojhranolu se světelný paprsek odchýlí dolů podle obr. R6. Pro malé úhly platí

$$\beta \doteq n\alpha, \quad \gamma = \beta - \alpha \doteq (n - 1)\alpha.$$

V dolní polovině dvojhranolu se paprsek odchýlí o stejný úhel γ vzhůru.

2 body



Obr. R6

Do středu O stínítka přicházejí obě vlnění s nulovým fázovým rozdílem (obr. R7). V bodě P o souřadnici y přichází vlnění z horní poloviny dvojhranolu s dráhovým předstihem $y \sin \gamma \doteq y\gamma$ a dolní vlnění je o stejnou dráhu opožděno. Aby vzniklo *interferenční maximum*, musí pro celkový dráhový rozdíl platit

$$\delta = 2y\gamma = k\lambda,$$

$$y = k \frac{\lambda}{2\gamma} = k \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = ks,$$

kde s je šířka jednoho interferenčního proužku, která zřejmě nezávisí na vzdálenosti stínítka od dvojhranolu, ale jen na lámacím úhlu α .

3 body

Předepsané šířky proužku dosáhneme volbou

$$\gamma = \frac{\lambda}{2s}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{2s(n-1)} = 5,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,329^\circ \doteq 20'.$$

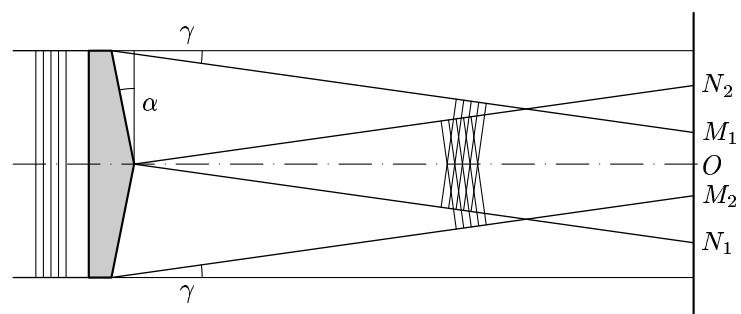
2 body

Svazek vln, které prošly horní polovinou dvojhranolu, dopadá na stínítka mezi body M_1 a N_1 o souřadnicích

$$y_1 = h - (d + h \tan \alpha) \tan \gamma \doteq h - (d + h\alpha)\gamma, \quad y_2 = -d \tan \gamma \doteq -d\gamma.$$

Druhý svazek vln, které prošly dolní polovinou dvojhranolu, dopadá mezi body M_2 a N_2 o souřadnicích $-y_1$ a $-y_2$ (obr. R8). Aby společná oblast, kde se objeví interferenční proužky, byla co největší, musí platit:

$$y_1 = |y_2|, \quad h - (d + h\alpha)\gamma = d\gamma, \quad d = \frac{h}{2\gamma} - \frac{h\alpha}{2} \doteq \frac{h}{2\gamma} = \frac{hs}{\lambda} = 3,2 \text{ m}.$$



Obr. R8

3 body

- 4.a) Odstředivá síla se bude rovnat vnitřní síle napjatosti. Z toho

$$4\frac{M}{2}\pi^2 f_0^2 \frac{R}{2} = \sigma_p S, \quad \sigma_p = \frac{MR\pi^2 f_0^2}{S} = 296 \text{ MPa}.$$

1 bod

- b) Před přetržením drátu má soustava moment setrvačnosti

$$J_0 = MR^2 + 2\frac{M}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}MR^2 = 0,0045 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

po dopadu závaží na konce příčky se moment setrvačnosti zvětší na

$$J_1 = MR^2 + 2\frac{M}{2}R^2 = 2MR^2 = 0,0072 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Ze zákona zachování momentu hybnosti plyne

$$J_0\omega_0 = J_1\omega_1, \quad f_1 = f_0 \frac{J_0}{J_1} = \frac{5}{8}f_0 = 31,3 \text{ s}^{-1}.$$

2 body

- c) Kinetická energie soustavy těsně před přetržením drátu

$$E_{k0} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = 2,5MR^2\pi^2 f_0^2 = 222 \text{ J}.$$

Kinetická energie po dopadu závaží

$$E_{k1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}2MR^2 \cdot 4\pi^2 \frac{25}{64}f_0^2 = \frac{25}{16}MR^2\pi^2 f_0^2 = 139 \text{ J}.$$

$$\frac{E_{k1}}{E_{k0}} = \frac{5}{8} = 0,625, \quad E_{k0} - E_{k1} = 0,375E_{k0} = 83 \text{ J}.$$

Příčina úbytku mechanické energie soustavy je v deformační práci, kterou vykonají závaží při dopadu na prstenec. Úbytek mechanické energie se projeví jako přírůstek vnitřní energie soustavy.

2 body

- d) α) Až do okamžiku dopadu závaží na konce příčky platí vedle zákona zachování momentu hybnosti také zákon zachování energie. Z něj určíme velikost rychlosti $\mathbf{v}$ závaží těsně před dopadem na konec příčky ve vztažné soustavě spojené s laboratorii.

$$E_{k0} = 2,5MR^2\pi^2 f_0^2 = \frac{1}{2}MR^2 4\pi^2 f_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{M}{2} v^2 = \frac{25}{32}MR^2\pi^2 f_0^2 + \frac{Mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{55}{16}} \pi R f_0 = 87,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rychlost $\mathbf{v}$ můžeme rozložit na složku $\mathbf{v}_1$ v okamžitém směru příčky a složku $\mathbf{v}_2$ ve směru kolmém k příčce (Obr. R9). Složka $\mathbf{v}_1$ při nepružném nárazu na konec příčky zaniká, složka $\mathbf{v}_2$ se při nárazu zachová a má velikost

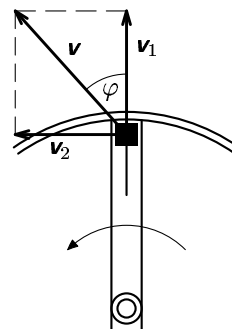
$$v_2 = 2\pi R f_1 = \frac{5}{4} \pi R f_0 = 58,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Velikost složky $\mathbf{v}_1$ určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$v_1 = \sqrt{v^2 - v_2^2} = \sqrt{\frac{30}{16}} \pi R f_0 = 64,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rychlost $\mathbf{v}$ svírá s okamžitým směrem příčky úhel

$$\varphi = \arctg \frac{v_2}{v_1} = 42,4^\circ.$$



Obr. R9

4 body

β) Ve vztažné soustavě spojené s rotující příčkou má závaží těsně před dopadem na konec příčky rychlost $\mathbf{v}_1$.

1 bod

Kontrolní výpočet: Úbytek kinetické energie soustavy při dopadu závaží na konce příčky odpovídá zániku složky $\mathbf{v}_1$:

$$E_{k0} - E_{k1} = \frac{15}{16} M R^2 \pi^2 f_0^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{M}{2} v_1^2, \quad v_1 = \sqrt{\frac{30}{16}} \pi R f_0.$$