Řešení úloh regionálního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: M. Jarešová (1), P. Šedivý (2), J. Houštěk (3,4)

1. a) Nechť u je konstantní velikost rychlosti klesání hladiny a v velikost okamžité rychlosti vody vytékající otvorem. Z rovnice kontinuity a Torricelliho vzorce pro výpočet rychlosti vytékající kapaliny plyne:

$$Su = \pi r^2 u = S_o v = S_o\sqrt{2gh}\,, \qquad \pi^2 r^4 u^2 = S_o^2 2gh\,, \tag{1}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{S_o^2 2gh}{\pi^2 u^2}} = C\sqrt[4]{h}\,. \tag{2}$$

Poloměr příčného průřezu nádoby je přímo úměrný čtvrté odmocnině z výšky průřezu nad otvorem ve dně. Konstanta úměrnosti

$$C = \sqrt{\frac{S_o\sqrt{2g}}{\pi u}} \tag{3}$$

závisí na plošném obsahu otvoru ve dně a na rychlosti, kterou má klesat hladina.

4 body

b) Objem rotační nádoby můžeme vypočítat jako určitý integrál:

$$V = \int_0^H \pi r^2\,\mathrm{d}h = \pi C^2 \int_0^H \sqrt{h}\,\mathrm{d}h = \frac{2\pi C^2 H^{\frac{3}{2}}}{3}\,. \quad \text{Z toho} \quad C = \sqrt{\frac{3V}{2\pi H^{\frac{3}{2}}}}\,. \tag{4}$$

Dosazením do (2) dostaneme:

$$R = \sqrt{\frac{3V}{2\pi H}} = 0{,}0892\ \mathrm{m} \doteq 8{,}9\ \mathrm{cm}\,.$$ **3 body**

Porovnáním (3) a (4) dostaneme:

$$C^2 = \frac{S_o\sqrt{2g}}{\pi u} = \frac{S_o t\sqrt{2g}}{\pi H} = \frac{3V}{2\pi H^{\frac{3}{2}}}\,,$$

$$S_o = \frac{3V}{2t\sqrt{2gH}} \doteq 2{,}1\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 = 3{,}43\ \mathrm{mm}^2\,.$$ **3 body**

2. a) Těsně před dosažením horní polohy pístu je úbytek potenciální elastické energie pružiny roven přírůstku potenciální tíhové energie a kinetické energie pístu a kuličky. Z toho určíme velikost v_1 rychlosti kuličky při opuštění pístu:

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v_1^2 + (m+m_1)g(l_1-l_0) = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l-l_1)^2\,,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k\left[(l-l_0)^2-(l-l_1)^2\right]}{m+m_1} - 2g(l_1-l_0)} = 3{,}06\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Také výšku h výstupu kuličky nad píst určíme užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh\,, \qquad h = \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}48\ \mathrm{m}\,.$$

5 bodů

b) Kdyby byl horní konec pružiny pevně spojen s pístem a kuličkou a pohyb pístu nebyl omezen zarážkou, rozkmital by se horní konec pružiny okolo rovnovážné polohy ve výšce $l-\Delta l = l-(m+m_1)g/k$ nad dnem nádobky (obr. R1). Zvolíme-li počátek vztažné soustavy v této rovnovážné poloze, jsou kmity popsány rovnicemi

$$y = -y_\mathrm{m}\cos\omega t\,, \qquad v = v_\mathrm{m}\sin\omega t\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+m_1}} = 39{,}9\ \mathrm{s^{-1}}\,,$$

$$y_\mathrm{m} = l - l_0 - \Delta l = 0{,}0838\ \mathrm{m}\,, \qquad v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = 3{,}34\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

V čase t_1, kdy se pružina roztáhne na délku l_1, je okamžitá výchylka

$$y_1 = -y_\mathrm{m}\cos\omega t_1 = -(l-l_1-\Delta l)\,.$$

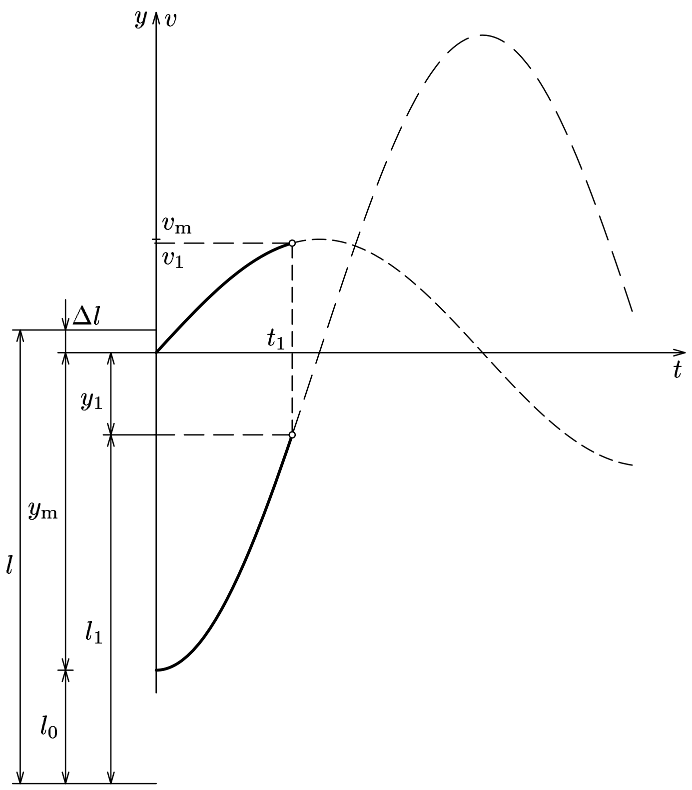
Z toho

$$\cos\omega t_1 = \frac{l-l_1-\Delta l}{l-l_0-\Delta l}\,, \qquad \omega t_1 = 1{,}155\ \mathrm{rad}\,, \qquad t_1 = 0{,}029\ \mathrm{s}\,.$$

5 bodů

Můžeme také zkontrolovat výsledek úkolu a):

$$v_1 = v_\mathrm{m}\sin\omega t_1 = 3{,}06\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$



Obr. R1

3. a) Světlo do hranolu pronikne bez lomu a na rozhraní sklo – vzduch dopadá pod úhlem α. Mezní úhel pro toto rozhraní je přibližně 35°, světlo se tedy láme. Podle zákona lomu platí pro žluté a fialové světlo:

$$n_{\check{z}} \sin\alpha = \sin\beta_{\check{z}}\,, \qquad n_{f} \sin\alpha = \sin\beta_{f}\,.$$

Z prvního vztahu vyjádříme $\beta_{\check{z}}$, do druhého dosadíme $\beta_{f} = \beta_{\check{z}} + \varphi_{f}$ a vyjádříme n_{f}:

$$n_{f} = \frac{\sin[\arcsin(n_{\check{z}}\sin\alpha) + \varphi_{f}]}{\sin\alpha} = 1{,}786$$

3 body

b) Podle zadání platí $n_{\check{z}} = a + b/\lambda_{\check{z}}{}^2$ a $n_{f} = a + b/\lambda_{f}{}^2$. Odtud plyne

$$a = \frac{n_{\check{z}}\lambda_{\check{z}}{}^2 - n_{f}\lambda_{f}{}^2}{\lambda_{\check{z}}{}^2 - \lambda_{f}{}^2} = 1{,}705\,, \qquad b = \frac{n_{\check{z}} - n_{f}}{\lambda_{\check{z}}{}^{-2} - \lambda_{f}{}^{-2}} = 1{,}62 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{m}^2\,,$$

$$n_{\check{c}} = a + \frac{b}{\lambda_{\check{c}}{}^2} = 1{,}738\,.$$

Odchylku opět určíme dosazením do zákona lomu:

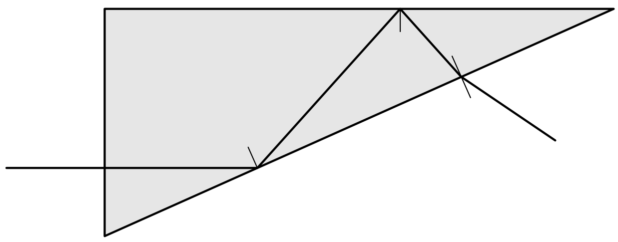
$$\varphi_{\check{c}} = \arcsin(n_{\check{c}}\sin\alpha) - \arcsin(n_{\check{z}}\sin\alpha) = -28'45'' \doteq 29'\,.$$

Záporné znaménko znamená, že úhel lomu červeného světla je menší než úhel lomu žlutého. **3 body**

c) V tomto uspořádání dopadá světlo na rozhraní sklo vzduch nejprve pod úhlem $90° - \alpha = 66°$, což je více než mezní úhel, dochází tedy k totálnímu odrazu (obr. R2). Na dalším rozhraní světlo dopadne již pod menším úhlem $66° - 24° = 42°$, stále tedy nedochází k lomu. Teprve na dalším rozhraní je úhel dopadu je úhel dopadu $42° - 24° = 18°$ a lom nastane. Odchylky určíme stejně jako v b), pouze místo α dosadíme $\alpha' = 90° - 3\alpha = 18°$.

$$\varphi_{f}{}' = \arcsin(n_{f}\sin\alpha') - \arcsin(n_{\check{z}}\sin\alpha') = 43'22'' \doteq 43'\,,$$

$$\varphi_{\check{c}}{}' = \arcsin(n_{\check{c}}\sin\alpha') - \arcsin(n_{\check{z}}\sin\alpha') = -18'17'' \doteq 18'\,,$$



Obr. R2

4 body

4.a) Čtverec je tvořen čtyřmi úsečkami. Umístíme-li bod X do jeho středu, platí pro všechny úsečky v souladu s označením na obr. 5:

$$d = \frac{a}{2}\,, \quad \alpha = 45°\,, \quad \beta = 135°\,, \quad \cos\alpha - \cos\beta = \sqrt{2}\,.$$

Indukce ve středu čtverce má velikost

$$B = 4\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\frac{a}{2}}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\,.$$

3 body

Ve středu kruhové smyčky o poloměru r je indukce $B' = \mu_0 I/(2r)$. Aby měl kruh stejný obvod jako čtverec o straně a, musí platit $r = 4a/(2\pi) = 2a/\pi$. Indukce jsou tedy v poměru

$$\frac{B'}{B} = \frac{\dfrac{\mu_0 I}{2\dfrac{2a}{\pi}}}{\dfrac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \doteq 0{,}87\,.$$

Ve středu kruhu je o 13 % menší magnetická indukce než ve středu čtverce.

2 body

b) Označme R odpor úseku délky a původního vodiče. Smyčka pak má odpor $3R/k$. Podle Kirchhoffových zákonů

$$(I - I_1)R = I_1\frac{3R}{k}\,, \qquad I_1 = \frac{k}{3+k}I\,.$$

2 body

c) Proud $I - I_1$ tekoucí mezi kontakty M, N původním vodičem lze rozložit na proud I tekoucí doprava a proud I_1 tekoucí doleva. Magnetické pole ve středu smyčky je tedy složeno z magnetického pole ve středu čtvercového závitu o straně a, kterým prochází proud I_1 a pole ve vzdálenosti $a/2$ od dlouhého přímého vodiče, kterým prochází proud I. Aby výsledná indukce byla nulová, musí platit

$$\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I_1}{\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\frac{a}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} = \frac{I}{I_1} = 1 + \frac{3}{k}\,,$$

$$k = \frac{3}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{6\sqrt{2} + 3}{7} \doteq 1{,}64\,.$$

3 body