

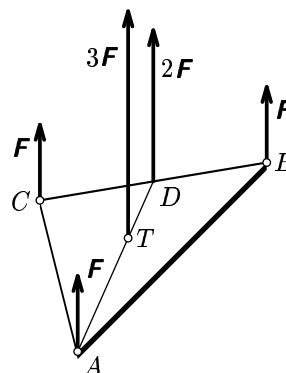
Řešení úloh 1. kola 42. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 6), B. Vybíral (7), J. Houštěk (5), L. Zdeborová (4),
úlohy 2 a 3 jsou motivovány úlohami z časopisu Kvant.

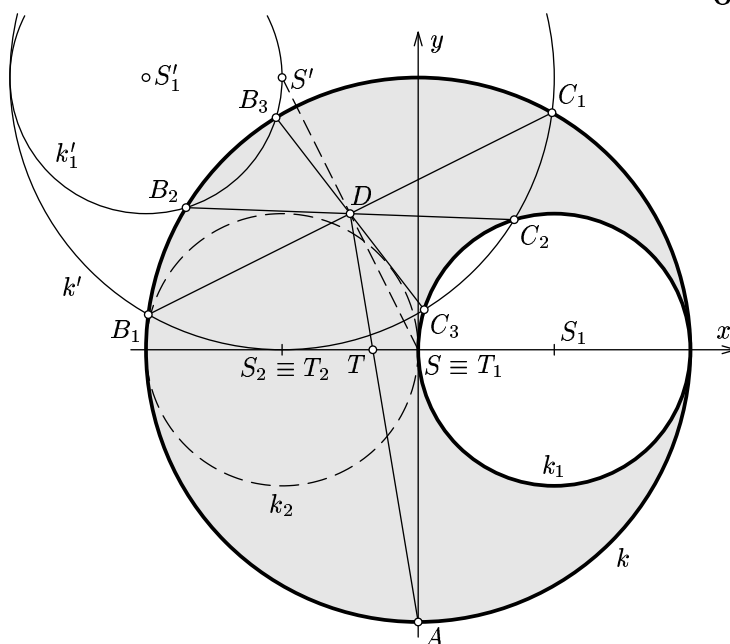
1. Působí-li podpěry umístěné v bodech A, B, C na desku stejnými silami $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B = \mathbf{F}_C = \mathbf{F}$, můžeme síly $\mathbf{F}_B$ a $\mathbf{F}_C$ nahradit jedinou silou $\mathbf{F}_D = 2\mathbf{F}$ působící ve středu D úsečky BC (obr R1). Působíště výslednice sil $\mathbf{F}_A$ a $\mathbf{F}_D$ dělí úsečku AD v poměru 2 : 1. Je to těžiště trojúhelníka ABC , které musí být totožné s těžištěm desky.

Grafické řešení úlohy je na obr. R2. Kružnice k_2 rozdělí desku na dvě části o těžištích $T_1 \equiv S$ a $T_2 \equiv S_2$, jejichž plošné obsahy jsou v poměru 2 : 1. Těžiště T celé desky je určeno vztahem

$$|ST| = \frac{|SS_2|}{3} = \frac{r}{6}.$$



Obr. R1



Obr. R2

Střed D úsečky BC leží na polopřímce AT , přičemž $|AD| = 1,5|AT|$. Jestliže bod B leží na kružnici k , musí bod C ležet na kružnici k' souměrně sdružené ke kružnici k podle bodu D , ale také na obvodu desky, tedy na kružnici k nebo k_1 . Pokud bod C

leží na kružnici k_1 , musí bod B ležet na kružnici k'_1 souměrně sdružené podle bodu D . Oba body B a C nemohou současně ležet na kružnici k_1 , neboť bod D leží vně kružnice a nemůže tedy být středem její tětivy.

Grafickým řešením dostáváme tři dvojice bodů B_1C_1 , B_2C_2 a B_3C_3 .

5 bodů

Přesnou polohu hledaných bodů určíme početně. Vztažnou soustavu zvolíme podle obr. R2. Platí:

$$D \left[-\frac{r}{4}, \frac{r}{2} \right], \quad S' \left[-\frac{r}{2}, r \right], \quad S'_1 [-r, r],$$

$$k: \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad (1)$$

$$k': \quad \left(x + \frac{r}{2} \right)^2 + (y - r)^2 = r^2, \quad (2)$$

$$k_1: \quad \left(x - \frac{r}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2} \right)^2, \quad (3)$$

Řešením soustavy rovnic (1), (2) dostaneme body B_1 a C_1 . Řešením soustavy rovnic (2), (3) dostaneme body C_2 a C_3 . Zbývající body B_2 a B_3 můžeme určit pomocí vztahu

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow B = 2D - C.$$

Po dosazení: $B_1[-0,992r, 0,129r]$, $C_1[0,492r, 0,871r]$, $B_2[-0,853r, 0,522r]$, $C_2[0,353r, 0,478r]$, $B_3[-0,522r, 0,853r]$, $C_3[0,022r, 0,147r]$.

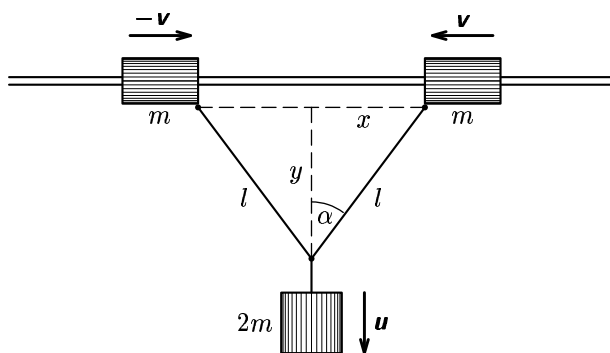
5 bodů

2. Označme rychlosti válců $\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$, rychlost závaží $\mathbf{u}$ a odchylku nitě od vertikály α (obr. R3). Protože nit má stálou délku, musí mít vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ stejně velké průměty do směru nitě:

$$v \sin \alpha = u \cos \alpha, \quad u = v \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i jiným postupem:

$$v = -\frac{dx}{dt}, \quad y = \sqrt{l^2 - x^2}, \quad u = \frac{dy}{dt} = \frac{-2x \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{vx}{y} = v \operatorname{tg} \alpha. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$



Obr. R3

Válce jsou až do srážky působením nití neustále urychlovány. Proto budou mít jejich rychlosti největší velikost v_m v okamžiku srážky. Ze vztahu (1) plyne, že velikost rychlosti závaží se před dosažením dolní polohy bude spojitě zmenšovat k nule. Ze zákona zachování energie odvodíme

$$2mgl = 2 \cdot \frac{1}{2}mv_m^2, \quad v_m = \sqrt{2gl}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Během celého pohybu platí

$$2mgy = 2mgl \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mu^2 = mu^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) = \frac{mu^2}{\sin^2 \alpha},$$

$$u^2 = 2gl \cos \alpha \sin^2 \alpha.$$

Užitím diferenciálního počtu zjistíme, že výraz dosahuje maxima pro

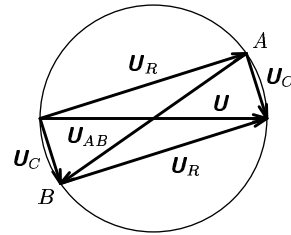
$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \alpha = 54,7^\circ$$

a maximální rychlost závaží má velikost

$$u_m = \frac{4gl}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{gl}{3\sqrt{3}}}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

3. a) V sériové větvi RC je napětí na rezistoru fázově posunuto o $\pi/2$ proti napětí na kondenzátoru. Fázorový diagram celého obvodu na obr. R4 má tvar obdélníka. Proto $U_{AB} = U = 240 \text{ V}$.

3 body



Obr. R4

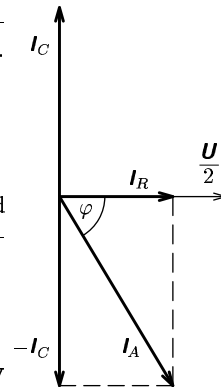
- b) Ampérmetrem prakticky zkratujeme body A , B a obvod rozdělíme na dvě stejné části, na kterých bude stejné napětí $U/2$. Součástkami procházejí proudy

$$I_R = \frac{U}{2R} = 0,12 \text{ A}, \quad I_C = \frac{U}{2X_C} = \frac{U\omega C}{2} = 0,377 \text{ A}.$$

V uzlu A se proud I_R přicházející z rezistoru dělí na proud ampérmetru I_A a proud kondenzátoru I_C . Z fázorového diagramu na obr. R5 plyne

$$I_A = I_R - I_C, \quad I_A = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 0,396 \text{ A}.$$

4 body



Obr. R5

- c) Proud procházející ampérmetrem je fázově opožděn za síťovým napětím o úhel $\varphi = \arccos(I_R/I_A)$. Wattmetr tedy bude ukazovat výkon

$$P = UI_A \cos \varphi = UI_A \frac{I_R}{I_A} = UI_R = 28,8 \text{ W}.$$

3 body

4. a) Zvolíme vztažnou soustavu spojenou s rotující nádobou (obr. R6). Hladina je v každém bodě kolmá k výslednici sil působících na částici taveniny — síly tíhové a setrvačné síly odstředivé. Ve vzdálenosti x od osy otáčení má tečná rovina sklon

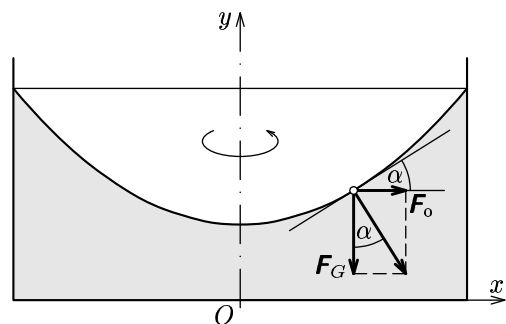
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_o}{F_G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx}.$$

Integrací dostaneme rovnici meridiánu rotační plochy

$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0,$$

což je rovnice paraboly. Její rotací vznikne rotační paraboloid.

Obr. R6



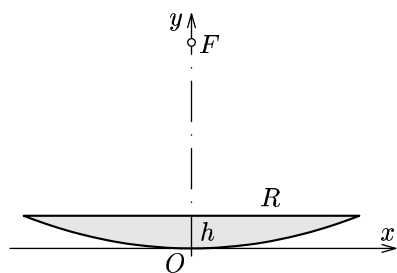
4 body

- b) Přemístíme-li počátek vztažné soustavy do vrcholu paraboloidu (obr. R7), zjednoduší se rovnice meridiánu na tvar

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2, \quad x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y = 2py = 4fy,$$

kde p je poloparametr paraboly a f ohnisková vzdálenost. Z toho

$$\omega^2 = \frac{g}{2f}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2f}{g}} = 10,8 \text{ s}.$$



Obr. R7
3 body

- c) Výška parabolického vrchlíku o poloměru R je

$$h = \frac{R^2}{4f} = 0,292 \text{ m}$$

a jeho objem $V = \int_0^h \pi x^2 dy = 4\pi f \int_0^h y dy = 2\pi f h^2 = \frac{\pi R^4}{8f} = 7,7 \text{ m}^3.$

3 body

5. a) Rychlost soukolí se postupně přibližuje k mezní hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = C = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Derivujeme-li vztah pro v , dostaneme zrychlení

$$a = \frac{dv}{dt} = kCe^{-kt}. \quad (1)$$

Směrnice tečny grafu v bodě $t = 0$ je $kC = \frac{C}{5 \text{ s}}$. Z toho $k = 0,2 \text{ s}^{-1}$.

2 body

- b) V soukolí se indukuje napětí $U_i = Blv$ orientované proti elektromotorickému napětí U_e . Obvodem prochází proud $I = \frac{U_e - Blv}{R}$ a na soukolí působí magnetická síla $F_m = BIl$, která mu uděluje zrychlení

$$a = \frac{F_m}{m} = \frac{BlU_e}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}v. \quad (2)$$

2 body

- c) Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme:

$$kCe^{-kt} = \frac{BlU_e}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}C(1 - e^{-kt}),$$

$$kCe^{-kt} = \frac{BlU_e}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}C + \frac{(Bl)^2}{mR}Ce^{-kt}.$$

Aby tento vztah platil, musí být $U_e = BlC$, $k = \frac{(Bl)^2}{mR}$.

Odtud již snadno dostáváme $B = \frac{U_e}{Cl} = 138 \text{ mT}$, $R = \frac{U_e^2}{mkC^2} = 1,89 \Omega$.

2 body

- d) Ze vztahu pro v vyjádříme t a dosadíme:

$$t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{C}{C - v_1} = 6,93 \text{ s}. \quad \text{1 bod Ze vztahu } F_m = BIl = ma \text{ plyne}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{m}{Bl}a = \frac{m}{Bl} \frac{dv}{dt}, \quad dQ = \frac{m}{Bl} dv.$$

V čase $t = 0$ je $v = 0$, $Q = 0$, Proto $Q_1 = \frac{m}{Bl}v_1 = \frac{mCv_1}{U_e} = 22 \text{ mC}$.

Ze zdroje byla odebrána energie $E_1 = U_e Q_1 = mCv_1 = 240 \mu\text{J}$.

2 body

- e) Kinetická energie soukolí je $E_k = mv_1^2/2$, účinnost je tedy

$$\eta = E_k/E_1 = v_1/2C = 37,5 \text{ \%}.$$

Zbývající část energie odebrané ze zdroje zvětšila vnitřní energii kolejnic a vozíku.

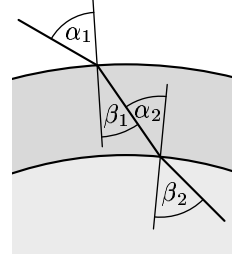
1 bod

6. Průchod paprsku stěnou válcové nádoby je znázorněn na obr. R8. Platí

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3}{n_1},$$

kde $n_1 \doteq 1$ je absolutní index lomu vzduchu, n_2 je absolutní index lomu materiálu stěny a $n_3 = n$ je absolutní index lomu měřené kapaliny. Je-li stěna velmi tenká, jsou kolmice dopadu prakticky rovnoběžné a platí

$$\beta_1 \doteq \alpha_2, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} \doteq n.$$

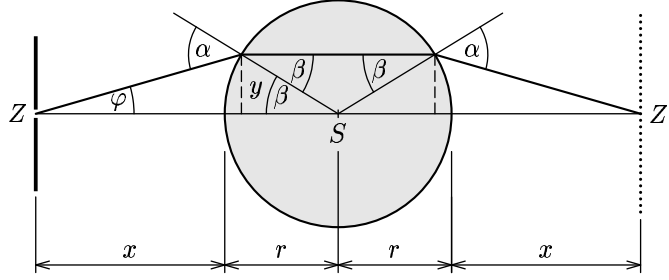


Obr. R8

Na indexu lomu materiálu stěny tedy nezáleží.

Odvození vztahu (1):

Vyjdeme z obr. R9. Platí $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, $\alpha = \beta + \varphi$.



Obr. R9

Pro malé y

$$\beta \doteq \sin \beta \doteq \frac{y}{r}, \quad \varphi \doteq \sin \varphi \doteq \frac{y}{x}, \quad n \doteq \frac{\alpha}{\beta} \doteq \frac{\frac{y}{r} + \frac{y}{x}}{\frac{y}{r}} = \frac{x+r}{x}.$$

Odvození vztahu (2):

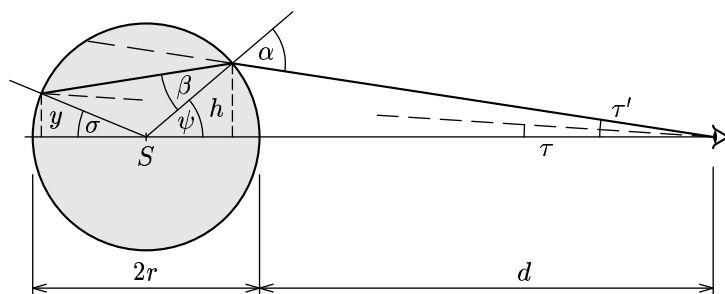
Vyjdeme z obr. R.10 Pro malé y a h platí

$$\tau' = \gamma \tau, \quad h \doteq d\tau' = \gamma \tau d \doteq \frac{\gamma y d}{d + 2r},$$

$$\beta = \frac{\sigma + \psi}{2} \doteq \frac{y + h}{2r} \doteq \frac{y}{2r} \left(1 + \frac{\gamma d}{d + 2r} \right) = \frac{y}{2r} \cdot \frac{d + 2r + \gamma d}{d + 2r},$$

$$\alpha = \psi + \tau' \doteq \frac{h}{r} + \frac{h}{d} = \frac{(d+r)h}{rd} \doteq \frac{(d+r)\gamma y d}{(d+2r)rd} = \frac{(d+r)\gamma y}{(d+2r)r},$$

$$n \doteq \frac{\alpha}{\beta} \doteq \frac{2(d+r)\gamma}{2r + d + \gamma d}.$$



Obr. R10

- 7.a) 1. Pro dostředivé zrychlení protonu platí (viz studijní text – D2):

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{evB_p}{m}, \quad \text{kde} \quad m = \frac{m_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Z toho $B_p = \frac{m_p v}{er \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,21 \text{ T} \doteq 2,2 \text{ T}$. Při nerelativistickém řešení,

kdy bereme $m = m_p$, je

$$B'_p = \frac{m_p v}{er} = 2,09 \text{ T} \doteq 2,1 \text{ T}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

2. Tok protonů představuje proud $I = \tau v$. Úsek AB (a rovněž úsek CD) vyvolá v bodě O pole o indukci (viz studijní text)

$$B_l = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2), \quad \text{kde} \quad \sin \beta_1 = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta_2 = 0.$$

Čtvrtkruhový úsek vyvolá v bodě O magnetické pole o indukci (viz studijní text)

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{8r}.$$

Výsledná indukce B_{op} v bodě O má opačný směr než B_p a velikost

$$B_{op} = 2B_l + B_r = \frac{\mu_0 \tau v}{r} \left(\frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8} \right) = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ T}.$$

$$\frac{B_{op}}{B_p} = \frac{\mu_0 \tau e}{m_p} \left(\frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6,0 \cdot 10^{-10}.$$

$$\text{Při nerelativistickém řešení je} \quad \frac{B_{op}}{B_p} = \frac{\mu_0 \tau e}{m_p} \left(\frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8} \right) = 6,1 \cdot 10^{-10}.$$

Indukce B_{op} je ve srovnání s B_p zanedbatelná.

3 body

3. Celková délka trajektorie a celkový náboj na ní jsou

$$L = 2l + \frac{\pi r}{2} = r \left(\frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} \right), \quad Q = L\tau.$$

$$\text{Z toho určíme počet protonů} \quad n_p = \frac{\tau L}{e} = \frac{\tau r}{e} \left(\frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Relativistická kinetická energie všech protonů je

$$E_p = n_p E_{1p} = \frac{\tau r}{e} \left(\frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) =$$

$$= 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ eV}.$$

3 body

- b) 1. Protože náboj jedné částice α je $2e$ a hmotnost $m_\alpha \doteq 4m_p$, je

$$B_\alpha \doteq 2B_p = 4,4 \text{ T}.$$

2. Protože počet částic je stejný a jedna částice α má náboj $2e$, je délková hustota náboje $\tau_\alpha = 2\tau$ a $B_{0\alpha} = 2B_{0p} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ T}$, a tedy

$$B_{0\alpha}/B_\alpha = B_{0p}/B_p.$$

3. Protože hmotnost $m_\alpha \doteq 4m_p$ a počet částic i jejich rychlosti jsou stejné, je celková kinetická energie $E_\alpha = 4E_p = 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

3 body