Řešení úloh regionálního kola 41. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autorka úloh: R. Horáková

1. Označme t_0 dobu, která uplynula od začátku rozjezdu do začátku měření a s_0 dráhu, kterou vlak za tuto dobu projel. Platí:

$$s_0 = \frac{1}{2}at_0^2\,, \qquad s_0 + l = \frac{1}{2}a(t_0+t_1)^2\,, \qquad s_0 + 2l = \frac{1}{2}a(t_0+t_1+t_2)^2\,.$$

3 body

Odečtením první rovnice od druhé a druhé od třetí a úpravami dostaneme:

$$l = at_0t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = a(t_0+t_1)t_2 + \frac{1}{2}at_2^2\,,$$

$$2t_0t_1 + t_1^2 = 2t_0t_2 + 2t_1t_2 + t_2^2\,, \qquad t_0 = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1-t_2)}\,,$$

$$a = \frac{2l}{2t_0t_1 + t_1^2}\,.$$

3 body

Numericky: $t_0 = 19{,}3$ s, $a = 0{,}45$ m$\cdot$s^{-2}. **2 body**

Do začátku měření vlak projel dráhu

$$s_0 = \frac{1}{2}at_0^2 = 84\ \text{m} = 3\times 22\ \text{m} + 18\ \text{m}\,.$$

Soupravu tedy tvoří 5 vagonů a lokomotiva, která je dlouhá 18 m. **2 body**

2. a) Z rovnosti

$$l_1(1+\alpha_1\Delta t) = l_2(1+\alpha_2\Delta t)$$

odvodíme

$$\Delta t = t - t_1 = \frac{l_2 - l_1}{l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2}\,.$$

Pro dané hodnoty dostáváme $\Delta t = -519$ K, což je nereálné, neboť bychom se dostali pod absolutní nulu. Tyče tedy nebudou mít stejnou délku při žádné teplotě.

3 body

b) Tyč délky l by se zvýšením teploty o Δt prodloužila o $\Delta l = l\alpha\Delta t$. Její relativní prodloužení by bylo

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha\Delta t\,.$$

O stejnou délku se tlakem zarážek zkrátí. Podle Hookova zákona

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES}$$

Spojením obou vztahů dostaneme: $F = \varepsilon ES = \alpha\Delta t ES\,.$
Síly, kterými tyče tlačí na zarážky jsou v poměru

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha_1\Delta t E_1 S}{\alpha_2\Delta t E_2 S} = \frac{\alpha_1 E_1}{\alpha_2 E_2}\,.$$

Pro dané hodnoty: $\dfrac{F_1}{F_2} = 0{,}87$. Měděná tyč tlačí na zarážky menší silou.

3 body

c) V obou tyčích vznikne stejné normálové napětí σ. Součet délek se při zahřátí nemění. O kolik se zvětší délka jedné tyče, o tolik se délka druhé zmenší. Platí:

$$\Delta l_1 = l\alpha_1\Delta t - l\frac{\sigma}{E_1} = -\Delta l_2 = -l\alpha_2\Delta t + l\frac{\sigma}{E_2}\,.$$

Úpravami dostaneme:

$$(\alpha_1+\alpha_2)\Delta t = \sigma\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right), \qquad \sigma = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)\Delta t E_1 E_2}{E_1+E_2}\,,$$

$$\Delta l_1 = l(\alpha_1\Delta t - \frac{(\alpha_1+\alpha_2)\Delta t E_1 E_2}{E_1(E_1+E_2)} = \frac{l\Delta t(\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2)}{E_1+E_2}\,.$$

Pro dané hodnoty: $\Delta l_1 = -2{,}3\cdot 10^{-5}$ m $= -0{,}023$ mm. Měděná tyč se zkrátí a zinková prodlouží o 0,023 mm.

4 body

3. a) Pro práci W_1 platí:

$$W_1 = (2V_0 - V_0)(2p_0 - p_0) = V_0 p_0 \,.$$

Obdobně:

$$W_2 = (3V_0 - V_0)(2p_0 - p_0) = 2V_0 p_0 \,.$$

2 body

b) V prvním případě plyn přijímá teplo při dějích AB, BC, ve druhém případě při dějích AB, BC'. Pro tepla přijatá během jednoho cyklu platí:

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A) + nC_p(T_C - T_B) \,,$$

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A) + nC_p(T'_C - T_B) \,.$$

2 body

Rozdíly teplot vyjádříme ze stavových rovnic:

$$T_B - T_A = \frac{p_0 V_0}{nR_\mathrm{m}} \,, \quad T_C - T_B = \frac{2p_0 V_0}{nR_\mathrm{m}} \,, \quad T'_C - T_B = \frac{4p_0 V_0}{nR_\mathrm{m}} \,.$$

1 bod

Po dosazení za C_V a C_p a za rozdíly teplot dostaneme:

$$Q_1 = 6{,}5 p_0 V_0 \,, \qquad Q_2 = 11{,}5 p_0 V_0 \,.$$

2 body

c) Pro účinnosti platí:

$$\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{2}{13} \,, \qquad \eta_2 = \frac{W_2}{Q_2} = \frac{4}{23} \,, \qquad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{23}{26} < 1 \,.$$

Větší účinnost má druhý stroj. **3 body**

4. a) Aby těleso trvale sledovalo harmonický pohyb desky musí na něj deska působit ve vodorovném směru harmonicky se měnící silou. Amplituda této síly

$$F_{\mathrm{m}} = ma_{x\mathrm{m}} = m\omega^2 x_{\mathrm{m}}$$

nesmí překročit statické tření. Z toho plyne:

$$m\omega^2 x_{\mathrm{m}} \leq \mu_0 mg\,, \qquad x_{\mathrm{m}} \leq \frac{\mu_0 g}{\omega^2} = \frac{\mu_0 g}{(4\pi^2 f^2}\,.$$

Pro dané hodnoty: $x_{\mathrm{m}} = 0{,}031\ \mathrm{m} = 31\ \mathrm{mm}$.

5 bodů

b) Při svislém kmitání desky působí na těleso ve svislém směru harmonicky se měnící výsledná síla $\boldsymbol{F}$ o amplitudě F_{m}, která vzniká složením stálé tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ orientované dolů a časově proměnné reakce desky $\boldsymbol{R}$ orientované vzhůru. V horní krajní poloze, kde je reakce desky nejmenší, musí platit:

$$R = F_G - F_{\mathrm{m}} \geq 0\,, \qquad F_G = mg \geq F_{\mathrm{m}} = m\omega^2 y_{\mathrm{m}}\,.$$

Úpravou dostaneme:

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{y_{\mathrm{m}}}}\,, \qquad f \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_{\mathrm{m}}}}\,.$$

Pro dané hodnoty: $f \leq 2{,}23\ \mathrm{Hz}$.

5 bodů