Řešení úloh 1. kola 41. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*
Autoři úloh: R. Horáková (1,2,3,5,6,7), J.Kalčík (4)

1. Na počátku je kinetická energie míče E_{k0}, potenciální energie tíhová je mgh_0. Další stavy míče shrneme do přehledu (potenciální energie tíhová je vztažena k podlaze):

Počáteční stav:	E_{k0}	mgh_0
Těsně před nárazem na strop:	E_{k1}	mgh
Těsně po odrazu od stropu:	E'_{k1}	mgh
Těsně před dopadem na podlahu:	E_{k2}	0
Těsně po odrazu od podlahy:	E'_{k2}	0
Konečný stav:	0	mgh_0

2 body

Ze zákona zachování energie a ze zadání plynou následující vztahy:

$$\begin{aligned} E_{k0} + mgh_0 &= E_{k1} + mgh\,, \\ E'_{k1} &= (1-k_s)E_{k1}\,, \\ E_{k2} &= E'_{k1} + mgh\,, \\ E'_{k2} &= (1-k_p)E_{k2}\,, \\ E'_{k2} &= mgh_0\,. \end{aligned}$$

5 bodů

Postupným dosazením a úpravou dostaneme:

$$mgh_0 = (1-k_p)\left\{mgh + (1-k_s)\left[\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(h_0-h)\right]\right\}\,,$$

$$v_0 = \sqrt{2g\left(\frac{h_0}{(1-k_p)(1-k_s)} - \frac{h}{1-k_s} + h - h_0\right)}\,.$$

2 body

Po dosazení $v_0 \doteq 4{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **1 bod**

2. a) Má-li být v nejvyšším bodě trajektorie síla napínající vlákno nulová, musí zde těleso letět takovou rychlostí $\boldsymbol{v}$, aby k vyvolání dostředivé síly právě postačila síla tíhová:

$$\mathrm{F_d} = \frac{mv^2}{d} = F_G = mg \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{gd}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

Hladinu nulové potenciální energie volíme v místě počáteční polohy tělesa. Podle zákona zachování energie platí:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgd\,, \qquad v_0^2 = gd + 4gd\,,$$

$$v_0 = \sqrt{5gd} \doteq 3{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,. \qquad \textbf{4 body}$$

b) Při průchodu rovnovážnou polohou stálou je dostředivá síla výslednicí síly vlákna $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ a tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$. Platí:

$$F_d = \frac{mv_0^2}{d} = F_\mathrm{t} - F_G\,, \qquad F_\mathrm{t} = F_\mathrm{d} + F_G = m\frac{5gd}{d} + mg = 6mg \doteq 29\ \mathrm{N}\,.$$

4 body

3. a) Zvolme vztažnou soustavu s počátkem v bodě O a vodorovnou souřadnicovou osou x. Těžiště tyče má souřadnici

$$x_T = \frac{l_2 - l_1}{2}\,.$$

Soustava bude v rovnovážné poloze, bude-li splněna momentová věta

$$\left(\varrho_1 \frac{4}{3}\pi R^3 - \varrho_2 \frac{2}{3}\pi R^3\right) g l_1 = mg\frac{l_2 - l_1}{2}\,.$$

3 body

Úpravou dostaneme:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 (2\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{m}{2}\left(\frac{l_2}{l_1} - 1\right)\,, \qquad \frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{4\pi R^3 (2\varrho_1 - \varrho_2)}{3m}\,.$$

2 body

b) Má-li být vlákno napnuto, musí platit

$$x_T > 0 \qquad \Rightarrow \qquad l_2 > l_1\,, \quad \to \quad \frac{l_2}{l_1} > 1\,, \quad \to \quad \varrho_1 > \frac{\varrho_2}{2}\,.$$

Pro $\varrho_1 = \frac{\varrho_2}{2}$ dostaneme $\frac{l_2}{l_1} = 1$. Tyč bude podepřena v těžišti a kulička se i bez působení vlákna vynoří polovinou svého objemu.

Pro $\varrho_1 < \frac{\varrho_2}{2}$ dostaneme $\frac{l_2}{l_1} < 1$, což nevyhovuje úloze. Kulička by se vynořila více než polovinou svého objemu a těžiště tyče by se nacházelo nad nádobou. To by vedlo k ohnutí vlákna a převrácení tyče na kouli.

3 body

c) Pro hodnoty $\varrho_1 = 2\,700\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\varrho_2 = 1\,000\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $R = 1{,}0\ \mathrm{cm}$, $m = 32\ \mathrm{g}$ lze dosáhnout vodorovné rovnovážné polohy tyče volbou

$$\frac{l_2}{l_1} \doteq 1{,}6$$

2 body

4. a) Počáteční hustotu vzduchu pod recipientem určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{p_0 V_0}{T} = \frac{m_0 R_\mathrm{m}}{M_\mathrm{m}}\,, \qquad \varrho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{p_0 M_\mathrm{m}}{T R_\mathrm{m}} = 1{,}19 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

2 body

Během každého zdvihu se část vzduch přemístí do pracovního válce a hustota vzduchu se zmenší. Platí

$$\begin{aligned} \varrho_0 V_0 &= \varrho_1 (V_0 + V_1) \\ \varrho_1 V_0 &= \varrho_2 (V_0 + V_1) \\ &\vdots \\ \varrho_{n-1} V_0 &= \varrho_n (V_0 + V_1) \end{aligned}$$

Vynásobením všech rovnic a jednoduchou úpravou dostaneme:

$$\varrho_n = \varrho_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n . \tag{1}$$

Pro $n = 10$ je $\varrho_{10} = \varrho_0 \cdot 0{,}558 = 0{,}664 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. **3 body**

Tlak vzduchu pod recipientem souvisí s jeho hustotou a teplotou podle vztahu

$$p_0 = \frac{\varrho_0 T_0}{M_\mathrm{m}}\,, \qquad p_n = \frac{\varrho_n T_n}{M_\mathrm{m}}\,,$$

kde T_n je termodynamická teplota vzduchu na konci čerpání. Jestliže se teplota vyrovná s teplotou laboratoře ($T_n = T_0$), je konečný tlak

$$p_n = p_0 \frac{\varrho_n}{\varrho_0} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n . \tag{2}$$

Pro $n = 10$ je $p_{10} = 5{,}58 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$. **2 body**

b) Hledaný počet zdvihů určíme řešením rovnice (2):

$$\frac{p_n}{p_0} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n , \qquad \log \frac{p_n}{p_0} = n \log \frac{V_0}{V_0 + V_1}\,,$$

$$n = \frac{\log \dfrac{p_n}{p_0}}{\log \dfrac{V_0}{V_0 + V_1}} = \frac{\log \dfrac{p_0}{p_n}}{\log \dfrac{V_0 + V_1}{V_0}}\,.$$

Pro $p_n < \frac{p_0}{100}$ dostaneme $n > 79{,}03$. Protože počet zdvihů musí být celé číslo, je řešením úlohy $n \geq 80$. **3 body**

5. a) Moment třecí síly označíme M. Druhý pohybový zákon pro otáčivý pohyb zapíšeme ve tvaru:

$$M\Delta t = J\omega_1 - J\omega_2 \,,$$

kde J je moment setrvačnosti otáčejícího se tělesa, ω_1 je úhlová rychlost na počátku doby Δt, ω_2 úhlová rychlost na konci této doby - v našem případě $\omega_2 = 0$.

$$M = J\frac{\omega_1}{\Delta t} = 2\pi f \cdot \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{\pi f m r^2}{\Delta t} \,.$$

Pro dané hodnoty je velikost momentu třecí síly $M = 1{,}0\ \mathrm{N \cdot m}$.

5 bodů

b) Práce vykonaná setrvačníkem proti brzdící síle je rovna úbytku kinetické energie:

$$W = \frac{1}{2} J(\omega_1^2 - \omega_2^2) \,, \qquad \omega_2 = 0 \,.$$

Úhlová dráha setrvačníku až do jeho zastavení je $\varphi = 2\pi n$. Setrvačník vykoná práci

$$W = M\varphi = 2\pi n M \,.$$

Porovnáním obou vztahů dostaneme: $M = \dfrac{\pi m r^2 f^2}{2n} = 0{,}80\ \mathrm{N \cdot m}\,.$

5 bodů

7. a) Ze stavové rovnice a obr. 3 plyne:

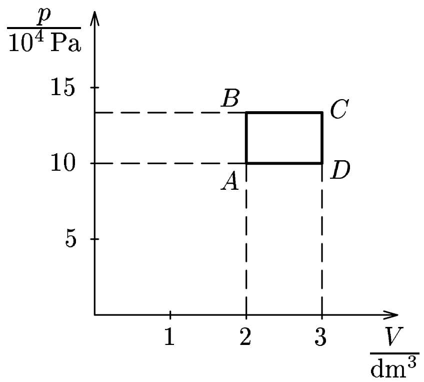
$$p_1 V_1 = n R_\mathrm{m} T_\mathrm{min} \,, \qquad p_2 V_2 = n R_\mathrm{m} T_\mathrm{max} \,, \qquad T_\mathrm{min} = T_A, \quad T_\mathrm{max} = T_C \,.$$

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_\mathrm{max}}{T_\mathrm{min}} \,, \qquad p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1 T_\mathrm{max}}{V_2 T_\mathrm{min}} \doteq 1{,}33 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = p_B = p_C \,.$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_C}{T_D} \,, \qquad T_B = T_A \frac{p_2}{p_1} = 400\ \mathrm{K} \,, \qquad T_D = T_C \frac{p_1}{p_2} = 450\ \mathrm{K} \,.$$

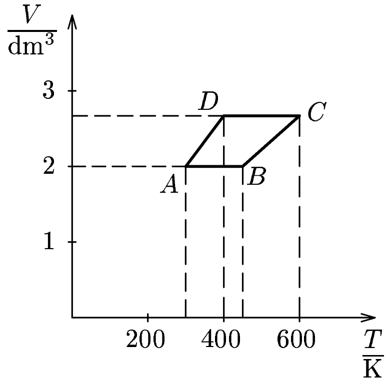
$$V_C = V_D = \frac{3}{2} V_1 = 3,0\ \mathrm{dm}^3 \,, \qquad p_D = p_1 = 1{,}00 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \,.$$

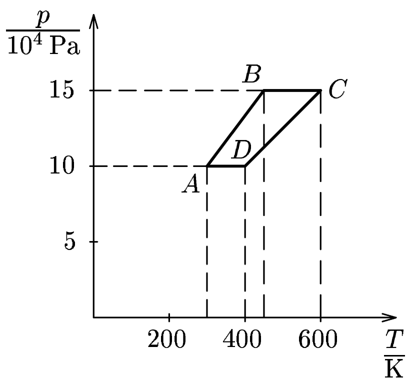
3 body



1 bod

b)





2 body

c) Během jednoho cyklu vykoná plyn práci

$$W' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) \doteq 33{,}3\ \mathrm{J}\,.$$ **1 bod**

d) K určení účinnosti musíme znát dodané teplo

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC} = nC_V(T_B - T_{\min}) + nC_p(T_{\max} - T_B)\,, \qquad n = \frac{p_1V_1}{R_\mathrm{m}T_{\min}}\,.$$

$$Q = \frac{5}{2}\cdot\frac{p_1V_1(T_B - T_{\min})}{T_{\min}} + \frac{7}{2}\cdot\frac{p_1V_1(T_{\max} - T_B)}{T_{\min}} \doteq 633\ \mathrm{J}\,.$$

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} \doteq 5{,}3\ \%\,.$$ **2 body**

e) Účinnost Carnotova cyklu je $\eta_\mathrm{c} = \dfrac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = 50\ \% > \eta\,.$ **1 bod**