

Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: L'. Mucha (2, 3), a P. Šedivý (1, 4)

- 1.a) Před dopadem na kvádr získá kulička (podle zákona zachování energie) rychlost o velikosti

$$v_1 = \sqrt{2gl} = 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Těsně po odrazu bude mít kulička rychlost o velikosti u_1 (ve směru zpět) a kvádr rychlost o velikosti u_2 (ve směru nárazu). Jestliže se po odrazu kulička vychýlí o úhel α_1 , platí podle ZZE:

$$\frac{1}{2}mu_1^2 = mgl(1 - \cos \alpha_1). \quad \text{Z toho} \quad u_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_1)} = 1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

- b) Podle zákona zachování hybnosti

$$mv_1 = -mu_1 + Mu_2, \quad u_2 = \frac{m}{M}(v_1 + u_1) = \frac{m}{M}(1 + \sqrt{1 - \cos \alpha_1})\sqrt{2gl}.$$

Během brzdění kvádr ztratí kinetickou energii a vykoná práci proti síle tření:

$$W = F_t d = f M g d = \frac{1}{2}Mu_2^2,$$

$$d = \frac{u_2^2}{2fg} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{l}{f} (1 + \sqrt{1 - \cos \alpha_1})^2 = 0,47 \text{ m}.$$

4 body

- c) V případě dokonale pružného odrazu by platil zákon zachování hybnosti i zákon zachování energie:

$$mv_1 = -mu_1 + Mu_2, \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}Mu_2^2.$$

Řešením této soustavy rovnic určíme velikost rychlosti kuličky po odrazu:

$$u_1 = \frac{M - m}{M + m}v_1.$$

Pro vychýlení kuličky platí podobně jako v a): $\frac{1}{2}mu_1^2 = mgl(1 - \cos \alpha_2),$

$$\cos \alpha_2 = 1 - \frac{u_1^2}{2gl} = 1 - \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^2 = \frac{4Mm}{(M + m)^2} = 0,64, \quad \alpha_2 \doteq 50^\circ.$$

4 body

- 2.a) Při pohybu lyžaře se uplatní pohybová složka tíhové síly, smykové tření a odpor vzduchu. Výslednice těchto sil má velikost

$$F = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) - Kv^2.$$

Na velmi dlouhém svahu dosáhne rychlost lyžaře mezní hodnoty v_m , při které je výslednice všech sil nulová a platí

$$mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) - Kv_m^2 = 0,$$

$$K = \frac{mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{v_m^2} = 0,5605 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2.$$

3 body

- b) Při modelování pohybu numerickou metodou pomocí jednodušší kalkulačky zvolíme časový krok $\Delta t = h = 1 \text{ s}$. Okamžité zrychlení lyžaře v čase t_i je

$$a_i = \frac{F}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{K}{m}v^2 = a_0 - Lv^2.$$

$$a_0 = 2,0178 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad L = 0,006228 \text{ m}^{-1}.$$

(Zaokrouhlíme až konečné výsledky.)

Při postupném výpočtu dráhy a rychlosti můžeme použít rekurentní vztahy

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot h, \quad s_{i+1} = s_i + v_i \cdot h + \frac{1}{2}a_i \cdot h^2 = s_i + \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \cdot h.$$

3 body

Výsledky výpočtů jsou uvedeny v levé tabulce. Pokud bychom zvolili kratší časový krok, přesnost modelu by se zvětšila a hodnoty by se přibližovaly k přesným hodnotám získaným analytickým řešením úlohy, které jsou uvedeny v pravé tabulce.

Zpracování tabulky 3 body

- c) I při omezené přesnosti použité metody můžeme z tabulky vyčíst, že lyžař projede prvních 50 m za dobu mezi 7 s a 8 s a na této dráze získá rychlost přibližně $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1 bod

numerí		cká metoda		presný		výpočet	
t / s	s / m	$v / m.s^{-1}$	a / m	$t.s^{-2}$	s / m	$v / m.s^{-1}$	
0	0,00	0,000	2,0	178	0,000	0,000	
1	1,009	2,018	1,9	924	1,007	2,009	
2	4,023	4,010	1,9	176	4,002	3,969	

3	8,992	5,928	1,7	989	8,914	5,835	
4	15,819	7,727	1,6	460	15,629	7,571	
5	24,369	9,373	1,4	707	24,003	9,150	
6	34,477	10,843	1,2	855	33,873	10,561	
7	45,964	12,129	1,1	016	45,066	11,797	

8	58,643	13,231	0,9	276	57,411	12,865	
9	72,338	14,158	0,7	694	70,745	13,776	
10	86,881	14,928	0,6	300	84,915	14,543	

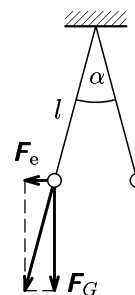
3. Kuličky na sebe ve vakuu vzájemně působí odpudivou silou

$$F_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \text{kde} \quad r = 2l \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Výsledná síla, která vzniká složením síly elektrické a síly tíhové, má směr vlákna a platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{F_e}{F_G} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 mg 4l^2 \sin^2(\alpha/2)} = \\ &= \frac{3Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \varrho gl^2 d^3 \sin^2(\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Obr. R1



Elektrický náboj kuliček je

$$Q = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3} \epsilon_0 \varrho gl^2 d^3 \sin^2(\alpha/2) \operatorname{tg}(\alpha/2)} = 54 \text{ nC}.$$

5 bodů

Po ponoření do dielektrické kapaliny se elektrické síly zmenší ϵ_r krát a proti tíhové síle bude působit síla vztlaková.

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{F_{er}}{F_G - F_v} = \frac{3Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r (\varrho - \varrho_0) gl^2 d^3 \sin^2(\beta/2)}.$$

Vydělením rovnic dostaneme

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\beta/2)} = \varepsilon_r \frac{(\varrho - \varrho_0) \sin^2(\beta/2)}{\varrho \sin^2(\alpha/2)},$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varrho \sin^2(\alpha/2) \operatorname{tg}(\alpha/2)}{(\varrho - \varrho_0) \sin^2(\beta/2) \operatorname{tg}(\beta/2)} = 8,7.$$

5 bodů

- 4.a) Na horním obrázku předbíhá proud před napětím časově o $T/4$, fázově o $\pi/2$. Jedná se tedy o obvod s kondenzátorem. Na dolním obrázku je proud opožděn za napětím časově o necelou čtvrtinu periody, fázově o necelou polovinu π . Jedná se tedy o obvod s cívkou, která ovšem není ideální a má nezanedbatelnou rezistanci. **1 bod**

- b) Obvodem s kondenzátorem prochází proud o periodě $T = 0,040$ s. Amplitudy napětí a proudu jsou $U_m = 4,0$ V a $I_m = 2,7$ mA. **1 bod**

Platí: $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_m}{I_m}, \quad C = \frac{I_m}{\omega U_m} = \frac{T I_m}{2\pi U_m}.$ **1 bod**

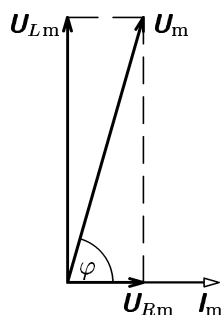
Numericky: $C = 4,3 \cdot 10^{-6}$ F = 4,3 μ F. **1 bod**

- c) Obvodem s cívkou prochází proud s periodou $T = 0,80$ s, který je opožděn za napětím o dobu $\tau = 0,16$ s. Fázové posunutí je tedy

$$\varphi = \frac{\tau}{T} 2\pi = 0,40 \pi = 72^\circ.$$

Amplitudy napětí a proudu jsou $U_m = 4,0$ V a $I_m = 4,8$ mA. **2 body**

Obr. R1



Sériovému spojení ideální cívky s ideálním rezistorem přísluší fázorový diagram na obr. R1, ze kterého odvodíme:

$$U_{Rm} = U_m \cos \varphi = 1,24 \text{ V},$$

$$U_{Lm} = U_m \sin \varphi = 3,8 \text{ V}.$$

Dále platí: $R = \frac{U_{Rm}}{I_m}, \quad X_L = \omega L = \frac{U_{Lm}}{I_m},$

$$L = \frac{U_{Lm} T}{2\pi I_m}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Numericky: $R \doteq 260 \Omega, \quad L \doteq 100 \text{ H}.$

1 bod