Řešení úloh 1. kola 41. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Randa (1, 3), I. Volf (2), K. Rauner (6), R. Baník (4),
V. Vícha (5) a P. Šedivý (7)

1. a) Označme $\boldsymbol{u}'$ rychlost míče po odrazu od kvádru. Ze zákona zachování hybnosti a zákona zachování energie plyne pro souřadnice rychlostí u_0, u' a v_1:

$$mu_0 = mu' + m_1v_1\,, \qquad \frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{1}{2}mu'^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2\,.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$v_1 = u_0\frac{2m}{m+m_1} = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$ **1 bod**

b) Po odrazu míče se v důsledku pohybu kvádru začne pružina nejprve stlačovat a bude působit na vozík a kvádr silami pružnosti $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ (obr. R1). Síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ udělí vozíku vzhledem k zemi zrychlení $\boldsymbol{a}$. Vztažná soustava spojená s vozíkem není inerciální. Chceme-li popsat pohyb závaží vzhledem k této soustavě, musíme počítat se setrvačnou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m_1\boldsymbol{a}$ (obr. R2). Je-li okamžitá výchylka kvádru z původní rovnovážné polohy vzhledem k vozíku x, platí

$$a = \frac{F_\mathrm{p}}{m_2} = \frac{kx}{m_2}$$

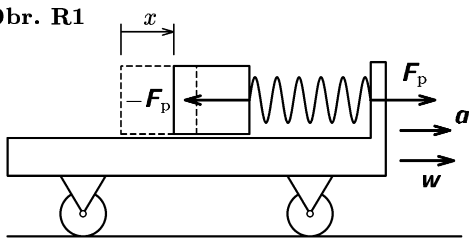
a na kvádr působí ve vztažné soustavě spojené s vozíkem výsledná síla

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{p} + \boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{p} - m_1\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{p}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)$$

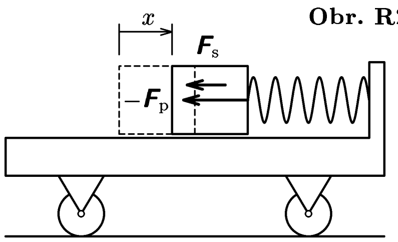
o souřadnici
$$F = -k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)x = -k'x\,.$$

Odvozené vztahy platí i po návratu kvádru do rovnovážné polohy a jeho vychýlení na opačnou stranu, kdy se pružina natáhne a síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ vozík brzdí. **2 body**

Obr. R1



Obr. R2



Kvádr se vzhledem k vozíku rozkmitá s úhlovou frekvencí ω a periodou T:

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m_1}} = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}} \doteq 10{,}2\ \mathrm{s^{-1}}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} = 0{,}613\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

Na počátku se kvádr nachází v rovnovážné poloze a velikost v_1 jeho počáteční rychlosti vzhledem k vozíku je tedy amplitudou rychlosti. Amplituda výchylky je

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{v_1}{\omega} \doteq 0{,}195\ \mathrm{m}\,.$$ **1 bod**

c) Těžiště soustavy kvádr–vozík se pohybuje rovnoměrně rychlostí $\boldsymbol{v}_T$, kterou určíme pomocí zákona zachování hybnosti:

$$(m_1 + m_2)v_T = m_1 v_1\,, \qquad v_T = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \doteq 0{,}57\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Za jednu periodu kmitů urazí vozík stejnou dráhu jako těžiště soustavy:

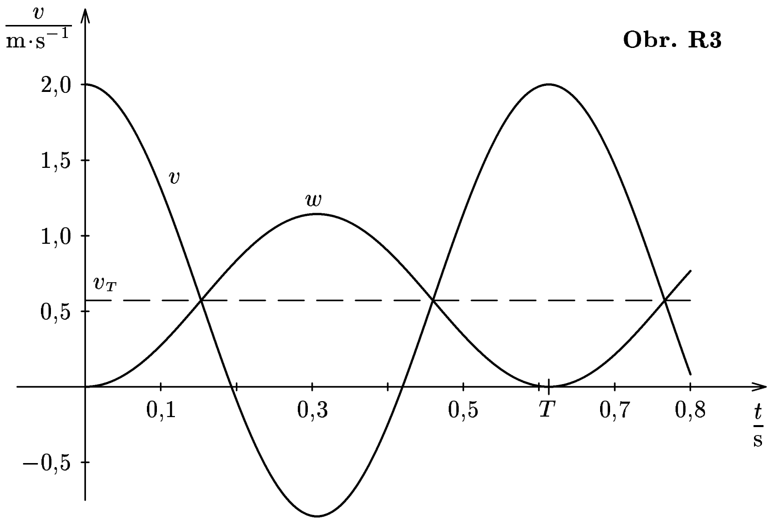
$$s = v_T T \doteq 0{,}35\ \mathrm{m}\,.$$ **1 bod**

d) Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}_{\mathrm{v}}$ kvádru vzhledem k vozíku je $v_{\mathrm{v}} = v_1 \cos\omega t$.
Okamžité rychlosti v, w kvádru a vozíku vzhledem k zemi musí podle zákona zachování hybnosti splňovat vztahy:

$$m_1 v_1 = m_1 v + m_2 w = m_1(w + v_1 \cos\omega t) + m_2 w\,, \qquad w = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 (1 - \cos\omega t)\,,$$

$$v = v_1 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos\omega t \right)\,.$$

Aby se kvádr pohyboval stále stejným směrem, muselo by platit $m_2 < m_1$.



Obr. R3

3 body

2. a) Podle 3. Keplerova zákona

$$\left(\frac{r_M}{r_Z}\right)^3 = \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2 , \qquad r_M = r_Z \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^{\frac{2}{3}} = 227{,}9 \cdot 10^6 \text{ km} .$$

$$v_M = \frac{2\pi r_M}{T_M} = 24{,}1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} .$$

b) Z obr. R4 odvodíme:

$$2a = r_Z + r_M , \qquad a = \frac{r_Z + r_M}{2} = 188{,}8 \cdot 10^6 \text{ km} .$$

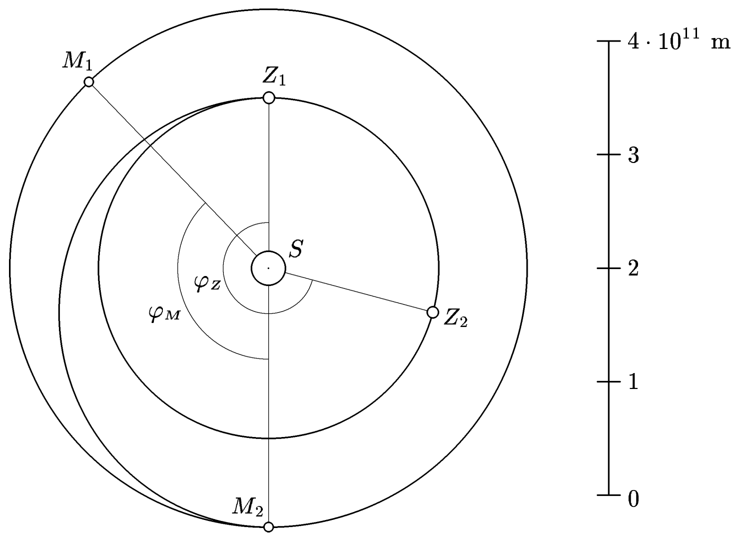
c) Dobu letu po Hohmannově trajektorii určíme z 3. Keplerova zákona jako polovinu periody pohybu po celé elipse:

$$\left(\frac{T}{T_Z}\right)^2 = \left(\frac{a}{r_Z}\right)^3 \qquad t = \frac{T}{2} = \frac{T_Z}{2}\left(\frac{a}{r_Z}\right)^{\frac{3}{2}} \doteq 259 \text{ d} .$$

d) Na obr. R4 jsou trajektorie Země, Marsu a kosmické lodi zobrazeny ve vyznačeném měřítku. Během letu kosmické lodi se průvodiče Země a Marsu otočí o úhlové dráhy

$$\varphi_Z = \frac{t}{T_Z} \cdot 360^\circ = 255^\circ , \qquad \varphi_M = \frac{t}{T_M} \cdot 360^\circ = 136^\circ .$$

Sestrojením těchto úhlů nalezneme hledané polohy Z_2 a M_1.



Obr. R4

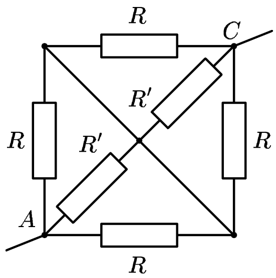
3. Odpor větve AB je $R = \varrho \frac{a}{S}$, kde a je délka strany čtverce, S průřez vodiče a ϱ měrný elektrický odpor materiálu, ze kterého je drát vyroben. Stejný odpor mají také větve BC, CD a AD. Odpor větve AE (rovněž BE, CE, DE) je

$$R' = \varrho \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{S} = R\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

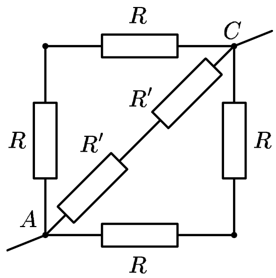
a) R_{AC}:
V bodech B, D a E je stejný potenciál. Lze proto větve BE, DE nahradit zkratem (obr. R5a) nebo vypustit (obr. R5b). V obou případech dojdeme ke stejnému odporu R_{AC}:

$$\frac{1}{R_{AC}} = 2\frac{1}{2R} + \frac{1}{2 \cdot R\frac{\sqrt{2}}{2}}\,, \qquad R_{AC} = R\left(2 - \sqrt{2}\right) \doteq 0{,}586\,R\,.$$

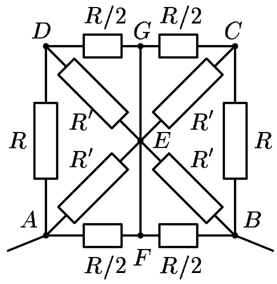
3 body



Obr. R5a



Obr. R5b



Obr. R6

b) $R_{AB} (= R_{AD})$:
Střed F větve AB a střed G větve CD mají stejný potenciál jako bod E. Z náhradního schématu na obr. R6 plyne:

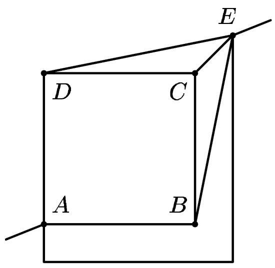
$$R_{AB} = \frac{2}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R'}}}} = \cdots = R \cdot \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7} \doteq 0{,}478\,R\,.$$

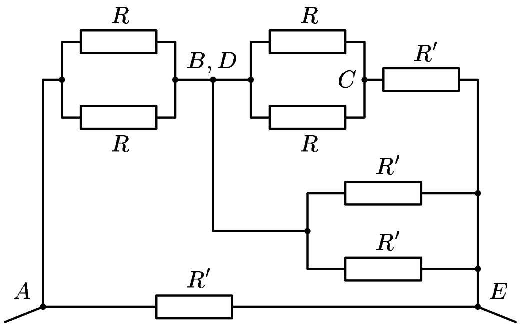
3 body

c) R_{AE}:
Pro přehlednost překreslíme schéma podle obr. R7a. V bodech B a D je stejný potenciál. Z náhradního schématu na obr. R7b plyne:

$$R_{AE} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{R'} + \cfrac{1}{\cfrac{R}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{R'} + \cfrac{1}{\cfrac{R}{2} + R'}}}} = \cdots = R \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{7} \doteq 0{,}369\,R\,.$$

3 body





Obr. R7a **Obr. R7b**

Odpory jsou v poměru

$$R_{AC} : R_{AB} : R_{AE} = 0{,}586 : 0{,}478 : 0{,}369\,.$$

Největší odpor změříme mezi uzly A a C, nejmenší mezi uzly A a E. **1 bod**

4. a) V roztoku kyseliny sírové dochází k disociaci $H_2SO_4 \rightleftharpoons 2H^+ + SO_4^{2-}$. Kationty H^+ vytvářejí s molekulami vody *oxoniové ionty* H_3O^+ a putují k záporné katodě, kde probíhá redukční reakce, při které vzniká vodík:

$$2\,H_3O^+ + 2e^- \rightarrow H_2 + 2H_2O \qquad \text{(Volmerova reakce)}$$

Anionty SO_4^{2-} putují ke kladné anodě, kde odevzdávají elektrony a reagují s vodou za vzniku kyslíku:

$$2\,SO_4^{2-} + 2\,H_2O \rightarrow 2e^- + 2\,H_2SO_4 + O_2$$ **2 body**

b) Při vzniku molekuly kyslíku O_2 se na anodě uvolní 4 elektrony. Stejně velký náboj stačí na katodě ke vzniku dvou molekul vodíku H_2. Proto objem plynu v trubici u katody roste rychleji než v trubici u anody. Počet N molekul plynu ve zcela zaplněné trubici určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = \frac{NR_\mathrm{m}}{N_\mathrm{A}}, \qquad N = \frac{N_\mathrm{A}pV}{R_\mathrm{m}T} = \frac{N_\mathrm{A}LS\left(p_\mathrm{a} + \frac{L}{2}\varrho g\right)}{R_\mathrm{m}T}.$$

Po dosazení: $N = 1{,}096 \cdot 10^{23}$.

$(T = 293{,}15\ \mathrm{K},\ p = 1{,}109 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa},\ V = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\ m^3.)$

K vyloučení takového počtu molekul vodíku potřebujeme náboj

$$Q_1 = 2Ne = I\tau_1 . \quad \text{Z toho:} \quad \tau_1 = \frac{Q_1}{I} = \frac{2Ne}{I}.$$

Po dosazení: $Q_1 = 3{,}51 \cdot 10^4$ C, $\tau_1 = 7{,}02 \cdot 10^4$ s $= 19{,}5$ h.

K vyloučení stejného počtu molekul kyslíku potřebujeme dvojnásobný náboj. Proto $\tau_2 = 2\tau_1 = 7{,}02 \cdot 10^4$ s $= 39$ h. Toto je také doba, za kterou budou zaplněny plynem obě trubice. **5 bodů**

c) Abychom získali N molekul kyslíku, musíme spotřebovat $2N$ molekul vody o relativní molekulové hmotnosti $M_\mathrm{r} = 18{,}016$. Celková hmotnost spotřebované vody je
$m = 2NM_\mathrm{r}m_\mathrm{u} = 6{,}55 \cdot 10^{-3}$ kg. **3 body**

5. a) Vztlaková síla musí mít alespoň takovou velikost, jako je tíha obalu a vzduchu uvnitř balonu:

$$V\varrho_1 g = mg + V\varrho_2 g, \qquad \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 = 4\pi r^2 \gamma + \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2,$$

ϱ_1 ... hustota okolního vzduchu, ϱ_2 ... hustota vzduchu uvnitř balonu,
m ... hmotnost obalu. Hustotu vzduchu určíme ze stavové rovnice:

$$\varrho = \frac{pM_m}{R_m T}, \qquad r = \frac{3\gamma T_1 T_2 R_m}{p_a M_m (T_2 - T_1)}.$$

Pro dané hodnoty: $r = 2{,}6$ m. **3 body**

b) Hmotnost balonu se zátěží je $(k+1)$-krát větší než hmotnost obalu:

$$V\varrho_1 g = (k+1)mg + V\varrho_2 g,$$

$$r = \frac{3(k+1)\gamma T_1 T_2 R_m}{p_a M_m (T_2 - T_1)}.$$

Pro dané hodnoty: $r = 10{,}4$ m. **2 body**

c) Z podmínky rovnováhy pro balon se zátěží m_0

$$V\varrho_1 g = (m_0 + m)g + V\varrho_2 g,$$

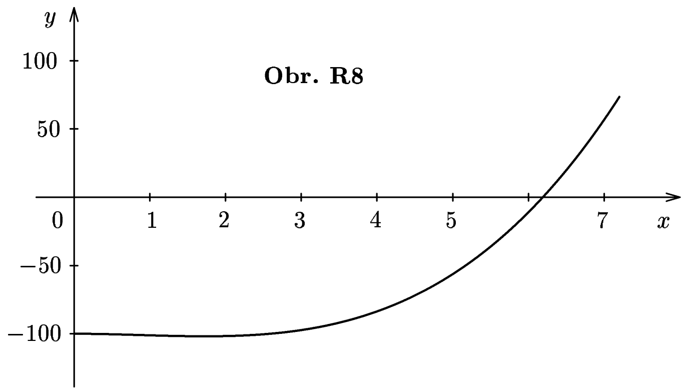
dojdeme k rovnici

$$\frac{4\pi p_a M_m}{3R_m}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right) r^3 - 4\pi r^2\gamma - m_0 = 0\,. \qquad \textbf{2 body}$$

Je to rovnice třetího stupně s neznámou r, kterou vyřešíme numericky. Po dosazení dostáváme rovnici s neznámou $x = \{r\}$ (číselná hodnota poloměru):

$$f(x) = 0{,}726\ x^3 - 1{,}88\ x^2 - 100 = 0\,.$$

Z grafu funkce $y = f(x)$ na obr. R8 odhadneme $r \doteq 6{,}2$ m. Přesnější výpočet vede k hodnotě $r = 6{,}19$ m. **3 body**



Obr. R8

7. a) Kdyby neexistoval odpor vzduchu, doletěl by míč za dobu

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 3{,}604\ \text{s} \quad \text{do vzdálenosti} \quad L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = 63{,}71\ \text{m}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

Modelování pohybu míče s odporem vzduchu i bez něj můžeme provést například následujícím programem v systému FAMULUS. Pro modelování pohybu bez odporu vzduchu v úloze b) stačí změnit hodnotu proměnné `ro` (hustota vzduchu) na `ro=0`; V úloze c) volíme hodnoty proměnné `vv` (rychlost větru) postupně 0, −5 a 5.

b) Numerický model pohybu bez odporu vzduchu vede k hodnotám

$$T = 3{,}605\ \text{s}\,, \qquad L = 63{,}73\ \text{m}\,,$$

které jsou prakticky stejné jako výsledky výpočtu v a). **3 body**

c) Model pohybu s odporem vzduchu za bezvětří dává hodnoty

$$T = 2{,}854\ \text{s}\,, \qquad L = 30{,}32\ \text{m}\,.$$

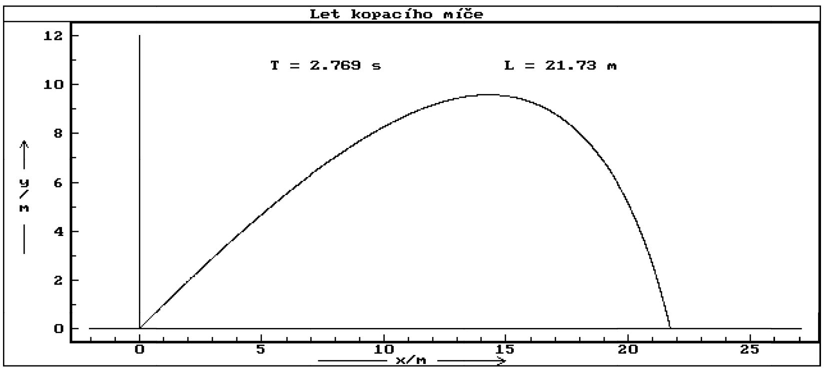
Při výkopu proti větru (viz obr. R9) dostáváme hodnoty

$$T = 2{,}769\ \text{s}\,, \qquad L = 21{,}73\ \text{m}$$

a při výkopu po větru hodnoty

$$T = 2{,}940\ \text{s}\,, \qquad L = 38{,}61\ \text{m}\,. \qquad \textbf{5 bodů}$$

```
Kopací míč
- - - - - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - - - - -
dt=0.001                 ! časový krok
g=9.81                   ! tíhové zrychlení
m=0.40; r=0.105; C=0.48  ! parametry míče
ro=1.25                  ! hustota vzduchu
K=0.5*C*pi*ro*r^2/m      ! pomocná konstanta
vv=-5                    ! rychlost větru
- - - - - - - - - - - - -  počáteční hodnoty   - - - - - - - - - - - - -
t=0
x=0; y=0                 ! počáteční poloha
v=25; alfa=45*pi/180     ! počáteční rychlost
vx=v*cos(alfa); vy=v*sin(alfa)
DISP
- - - - - - - - - - - - - - - -  model  - - - - - - - - - - - - - - - -
x=x+vx*dt; y=y+vy*dt
vxr=vx-vv; vr=sqrt(vxr^2+vy^2)  ! relativní rychlost vzhledem ke vzduchu
ax=-K*vr*vxr; ay=-g-K*vr*vy
vx=vx+ax*dt; vy=vy+ay*dt
t=t+dt
IF y<0 THEN t=t-y/vy; x=x-y/vy*vx  ! lineární interpolace
    SetWritePos(1,5,11)
    WRITE Graph, 'T = ',t:5:3,'s            L = ',x:5:2,'m'
STOP END
```



Obr.R9