

Řešení úloh regionálního kola 41. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: L. Zdeborová (1), P. Šedivý (2, 3), I. Čáp (4)

- 1.a) Během valení se mění potenciální energie trubky i tyčky. Vyjádříme-li úhel β v radiánech, platí:

$$\Delta E_{p1} = -Mg\beta R \sin \alpha, \quad \Delta E_{p2} = -mg\beta R \sin \alpha + mgR[\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)].$$

Protože celková potenciální energie soustavy trubka – tyčka je ve výchozí poloze nulová, platí po přemístění:

$$E_p = \Delta E_{p1} + \Delta E_{p2} = -MgR\beta \sin \alpha + mgR[\cos \alpha - \beta \sin \alpha - \cos(\alpha + \beta)].$$

3 body

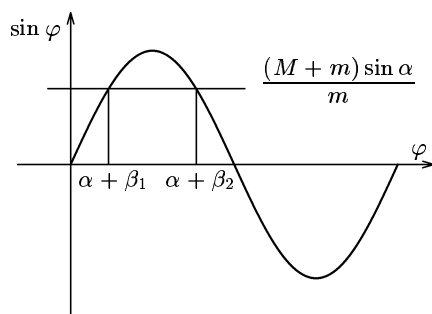
- b) V rovnovážné poloze nabývá potenciální energie lokálního extrému:

$$\frac{dE_p}{d\beta} = -MgR \sin \alpha + mgR[-\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta)] = 0,$$

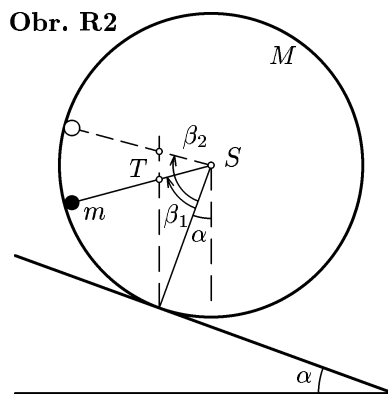
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{(M + m) \sin \alpha}{m}. \quad (1)$$

Aby existovaly rovnovážné polohy, musí být splněna podmínka

$$\frac{(M + m) \sin \alpha}{m} \leq 1.$$



Obr. R1



Obr. R2

Ke stejnému výsledku můžeme dojít úvahou, že v rovnovážné poloze se těžiště soustavy nachází nad místem dotyku trubky s nakloněnou rovinou. Vzdálenost těžiště soustavy od osy trubky je

$$|ST| = R \frac{m}{M+m}.$$

Z obr. R2 plyne:

$$R \frac{m}{M+m} \sin(\alpha + \beta) = R \sin \alpha, \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{(M+m) \sin \alpha}{m}.$$

3 body

Diskuse:

1. Pokud $\frac{(M+m) \sin \alpha}{m} < 0$ má rovnice (1) v základním intervalu $(0, 360^\circ)$ dvě řešení (obr. R1). Platí

$$\alpha + \beta_1 < 90^\circ, \quad \alpha + \beta_2 < 90^\circ,$$

$$\beta_1 = \arcsin \left[\frac{M+m}{m} \sin \alpha \right] - \alpha, \quad \beta_2 = 180^\circ - \arcsin \left[\frac{M+m}{m} \sin \alpha \right] - 2\alpha.$$

Pro úhel β_1 je rovnovážná poloha stabilní, pro úhel β_2 je labilní. Plyne to z úvahy o momentech sil při malém vychýlení z rovnovážné polohy či z vyšetření znaménka derivace $\frac{dE_p}{d\beta}$ v okolí extrému.

2. Pokud $\frac{(M+m) \sin \alpha}{m} = 0$ má rovnice (1) jedno řešení $\beta = 90^\circ - \alpha$ a příslušná rovnovážná poloha je labilní.

2 body

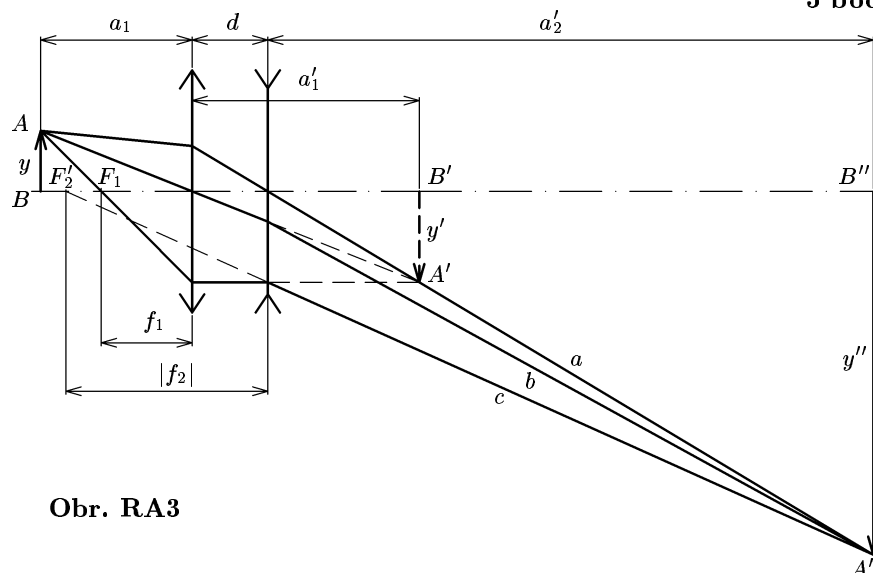
c) Aby se trubka skutálela po nakloněné rovině, musíme ji z polohy stabilní s úhlem β_1 převalit do polohy labilní s úhlem β_2 . K tomu je zapotřebí vykonat práci

$$W = E_p(\beta_2) - E_p(\beta_1).$$

2 body

- 2.a) Grafické řešení úlohy pomocí význačných světelných paprsků je na obr. RA3. Nejprve pomocí paprsků a a b nalezneme pomocný obraz A_1 a potom pomocí paprsku c ohniska F_1 a F_2' . Z obrázku je zřejmé, že první čočka je spojka a druhá rozptylka.

5 bodů



Obr. RA3

- b) V početním řešení použijeme označení veličin vyznačené v obr. RA5. Z čočkové rovnice a vztahu pro výpočet zvětšení dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{d - a'_1} + \frac{1}{a'_2} = \frac{1}{f_2}, \quad \frac{y'}{y} = -\frac{a'_1}{a_1}, \quad \frac{y''}{y'} = -\frac{a'_2}{d - a'_1},$$

kterou vyřešíme postupně:

$$\frac{y''}{y} = \frac{a'_1 a'_2}{a_1 (d - a'_1)}, \quad a'_1 = \frac{y'' a_1 d}{a'_2 y + y'' a_1} = 7,5 \text{ cm},$$

$$f_1 = \frac{a_1 a'_1}{a_1 + a'_1} = 3,0 \text{ cm},$$

$$f_2 = \frac{(d - a'_1) a'_2}{d - a'_1 + a'_2} = -6,7 \text{ cm},$$

5 bodů

3.a) Tuhost gumového vlákna je

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = 0,245 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

1 bod

b) Náboj koule určíme ze vztahu pro výpočet potenciálu. Protože potenciál je kladný, je i náboj koule kladný.

$$\varphi = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R\varphi = 44 \text{ nC}.$$

1 bod

Náboj na kuličce určíme užitím Coulombova zákona. Protože elektrická síla je zřejmě přitažlivá, je náboj kuličky záporný. V rovnovážné poloze platí

$$mg + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{d^2} = k(\Delta l + h), \quad mg = k\Delta l, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{d^2} = kh,$$

Spojením předcházejících vztahů dostaneme:

$$Q_1 = -\frac{kh4\pi\epsilon_0 d^2}{Q_2} = -\frac{mgh4\pi\epsilon_0 d^2}{\Delta l 4\pi\epsilon_0 R\varphi} = -\frac{mghd^2}{\Delta l R\varphi} = -31 \text{ nC}.$$

2 body

c) Během kmitání působí na kuličku síla vlákna, tíhová síla a elektrická přitažlivá síla nabitě koule. Pro svislou souřadnici výsledné síly při okamžité výchylce y platí

$$F = k(\Delta l + h - y) - mg - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{(d + y)^2} = k(h - y) - kh \frac{d^2}{(d + y)^2}.$$

1 bod

Pro $y \ll d$ můžeme provést úpravu

$$F = k(h - y) - kh \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{d}\right)^2} \doteq -k(h - y) - kh \left(1 - 2\frac{y}{d}\right) = -ky \left(1 - \frac{2h}{d}\right)$$

a napsat pohybovou rovnici kmitů

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \left(1 - \frac{2h}{d}\right) y = -m\omega^2 y,$$

ze které plyne

$$\omega = \sqrt{\frac{k \left(1 - \frac{2h}{d}\right)}{m}} = \sqrt{\frac{g \left(1 - \frac{2h}{d}\right)}{\Delta l}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g \left(1 - \frac{2h}{d}\right)}} = 2,0 \text{ s}.$$

4 body

Obecné řešení vyhovuje, pokud $d > 2h$. Kdyby platilo $d \leq 2h$, byla by předpokládaná rovnovážná poloha kuličky labilní. Kulička by přiskočila ke kouli, získala by náboj souhlasného znaménka a podmínky úlohy by se změnily.

1 bod

- 4.a) Odpor mezi svorkami A , B by se nezměnil, kdybychom na začátek řetězce přidali další dva rezistory. Můžeme tedy použít náhradní schéma podle obr. R4, ze kterého odvodíme

$$R_x = R + \frac{R \cdot R_x}{R + R_x}.$$

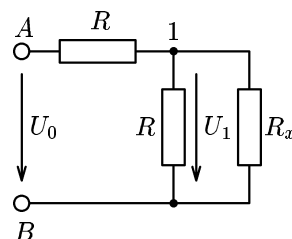
Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$R_x^2 - RR_x - R^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$R_x = \frac{R(1 + \sqrt{5})}{2}.$$

Obr. R4



4 body

- b) Schéma na obr. R4 představuje dělič napětí, na jehož vstupu je napětí U_0 a na výstupu (uzel 1 a svorka B) je napětí U_1 . Platí:

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{R \cdot R_x}{R + R_x}}{R + \frac{R \cdot R_x}{R + R_x}},$$

$$\frac{R \cdot R_x}{R + R_x} = \frac{R \cdot \frac{R(1 + \sqrt{5})}{2}}{R + \frac{R(1 + \sqrt{5})}{2}} = \frac{R(1 + \sqrt{5})}{3 + \sqrt{5}} = R \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

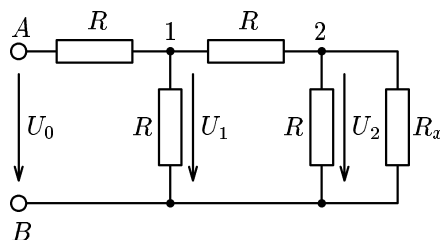
$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}}{R + \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \doteq 0,382, \quad U_1 = U_0 \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \doteq 0,382.$$

3 body

- c) Pro určení napětí U_2 překreslíme schéma podle obr. R5. Řetěz rezistorů napravo od uzlu 1 se opět chová jako dělič napětí z obr. R4. Proto

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_1}{U_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}.$$

Obr. R5



Obdobně bychom postupovali u dalších uzlů. Vidíme, že uzlová napětí tvoří geometrickou posloupnost

$$U_i = U_0 q^i, \quad q = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \doteq 0,382.$$

Pořadové číslo nejbližšího uzlu, kde napětí klesne pod $0,01 U_0$, určíme řešením nerovnice:

$$U_i = U_0 q^i < 0,01 U_0, \quad q^i \leq 0,01, \quad i \cdot \log q < -2,$$

$$i > \frac{-2}{\log q} \doteq \frac{-2}{\log 0,382} \doteq 4,8.$$

Podmínce vyhovuje $i = 5$.

3 body