Řešení úloh 1. kola 41. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*
Autoři úloh: I. Košinár (1), P.Šedivý (2, 3, 6), B. Vybiral (7);
úlohy 4 a 5 jsou motivovány úlohami z časopisu Kvant.

1. Zvolme rovinu horního okraje misky za hladinu nulové potenciální energie. Těžiště tyčinky se bude nacházet pod touto rovinou v hloubce

$$h = \left(2R\cos\alpha - \frac{L}{2}\right)\sin\alpha\,,$$

kde α je úhel sklonu tyčinky (obr. R1). Ten bude ve stabilní poloze takový, že potenciální energie tyčinky

$$E_\mathrm{p} = -mgh = -mg\left(2R\cos\alpha - \frac{L}{2}\right)\sin\alpha$$

bude minimální. Musí tedy platit

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\alpha} = mg\left(2R\sin^2\alpha - 2R\cos^2\alpha + \frac{L}{2}\cos\alpha\right) = 0\,.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$4R\cos^2\alpha - \frac{L}{2}\cos\alpha - 2R = 0\,.$$

Protože zřejmě $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, vyhovuje úloze pouze kořen

$$\cos\alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{16R}\,. \tag{1}$$

Musíme ještě ověřit, že pro takto určený úhel α je potenciální energie minimální. Dalším derivováním a dosazením dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\,\alpha^2} = mg\sin\alpha\left(8R\cos\alpha - \frac{L}{2}\right) = mg\sin\alpha\frac{\sqrt{L^2+128R^2}}{2} > 0\,.$$

Druhá derivace je kladná, potenciální energie dosahuje pro daný úhel lokálního minima.

4 body

Posuďme ještě, pro které hodnoty L má daný výsledek smysl. Z podmínky $2R\cos\alpha > \dfrac{L}{2}$ dostaneme:

$$\frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{8} > \frac{L}{2}\,, \quad \text{po úpravě} \quad L < 4R\,.$$

Z podmínky $2R\cos\alpha < L$ dostaneme:

$$\frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{8} < L\,, \quad \text{po úpravě} \quad L > \sqrt{\frac{8}{3}}R \doteq 1{,}63R\,.$$

Tyčinka se tedy může nacházet v stabilní šikmé poloze podle obr. 1, pokud $\sqrt{\frac{8}{3}}R < L < 4R$. Pro $L \leq \sqrt{\frac{8}{3}}R$ tyčinka sklouzne celá do misky a zaujme vodorovnou stabilní polohu.

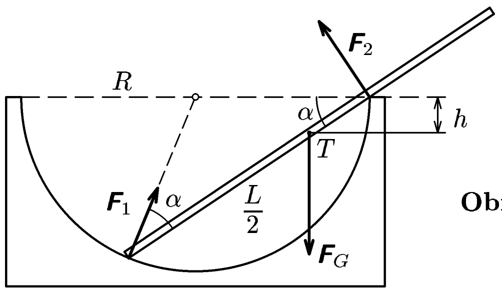
Také pro $\sqrt{\frac{8}{3}}R < L < 2R$ může tyčinka zaujmout vodorovnou stabilní polohu uvnitř misky.

3 body

V případech podle zadání jsou stabilní polohy:

1) Jediná rovnovážná poloha vodorovná uvnitř misky.
2) Dvě rovnovážné polohy — jedna vodorovná uvnitř misky a druhá šikmá s úhlem $\alpha \doteq 35°$.
3) Jediná rovnovážná poloha šikmá s úhlem $\alpha \doteq 27°$.

3 body



Obr. R1

Poznámka: K výsledku (1) lze také dojít řešením soustavy rovnic vyjadřujících podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned}
F_1 \cos 2\alpha &= F_2 \sin\alpha\,,\\
F_1 \sin 2\alpha + F_2 \cos\alpha &= mg\,,\\
F_2 R \cos\alpha &= mg\frac{L}{2}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{mgL}{4R}\,.
\end{aligned}$$

2. a) Označme S plošný obsah příčného průřezu válce, S_1 plošný obsah otvoru, v výtokovou rychlost. Z rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice plyne:

$$S_1 v \cdot \mathrm{d}t = -S \cdot \mathrm{d}h\,, \qquad \varrho g h = \frac{1}{2}\varrho v^2\,, \qquad v = \sqrt{2gh}\,,$$

$$S \cdot \mathrm{d}h = -S_1\sqrt{2gh} \cdot \mathrm{d}t\,, \qquad \frac{\mathrm{d}h}{h^{\frac{1}{2}}} = -\frac{S_1}{S}\sqrt{2g} \cdot \mathrm{d}t\,.$$

3 body

Integrací dostaneme:

$$\int\limits_{h_0}^{h} \frac{\mathrm{d}h}{h^{\frac{1}{2}}} = \left[2h^{\frac{1}{2}}\right]_{h_0}^{h} = -\frac{S_1}{S}\sqrt{2g}\int\limits_0^t \mathrm{d}t = -\frac{S_1}{S}\sqrt{2g} \cdot t\,,$$

$$2h^{\frac{1}{2}} - 2h_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{S_1}{S}\sqrt{2g} \cdot t\,,$$

$$h = \left(h_0^{\frac{1}{2}} - \frac{S_1}{2S}\sqrt{2g} \cdot t\right)^2 = \left(h_0^{\frac{1}{2}} - \frac{r^2}{2R^2}\sqrt{2g} \cdot t\right)^2\,.$$

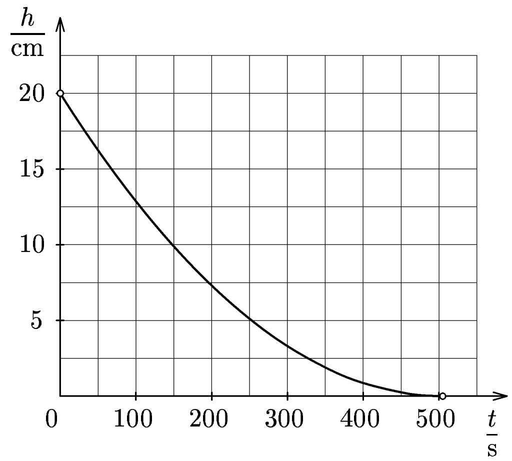
3 body

b) Hladina klesne ke dnu v čase

$$t = \sqrt{\frac{h_0}{2g}} \cdot \frac{2R^2}{r^2} \doteq 505\ \mathrm{s} = 8\ \mathrm{min}\ 25\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

c)



Obr. R2 **2 body**

3. a) Dioda propouští nabíjecí proud, když $u = U_{\mathrm{m}} \sin \omega t > U_{\mathrm{b}}$. Na počátku a na konci tohoto časového intervalu platí

$$\sin \omega t = \frac{U_{\mathrm{b}}}{U_{\mathrm{m}}} = \frac{U_{\mathrm{b}}}{U\sqrt{2}} = 0{,}50283\,.$$

Řešením rovnice dostaneme:

$$\omega t_1 = 0{,}52687 \text{ rad}\,, \quad \omega t_2 = 2{,}61472 \text{ rad}\,, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ s}^{-1}\,,$$

$$t_1 = 0{,}00168 \text{ s}\,, \quad t_2 = 0{,}00832 \text{ s}\,.$$

Během jedné periody střídavého napětí prochází nabíjecí proud po dobu $t_2 - t_1 = 0{,}00664$ s, což je 33,2 % periody.

3 body

b) Během jedné periody střídavého napětí přijme akumulátor náboj

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U_{\mathrm{m}} \sin \omega t - U_{\mathrm{b}}}{R} \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{U_{\mathrm{m}}}{\omega R} \cos \omega t - \frac{U_{\mathrm{b}}}{R} t \right]_{t_1}^{t_2}\,,$$

$$Q = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\omega R} (cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_{\mathrm{b}}}{R} (t_2 - t_1)\,.$$

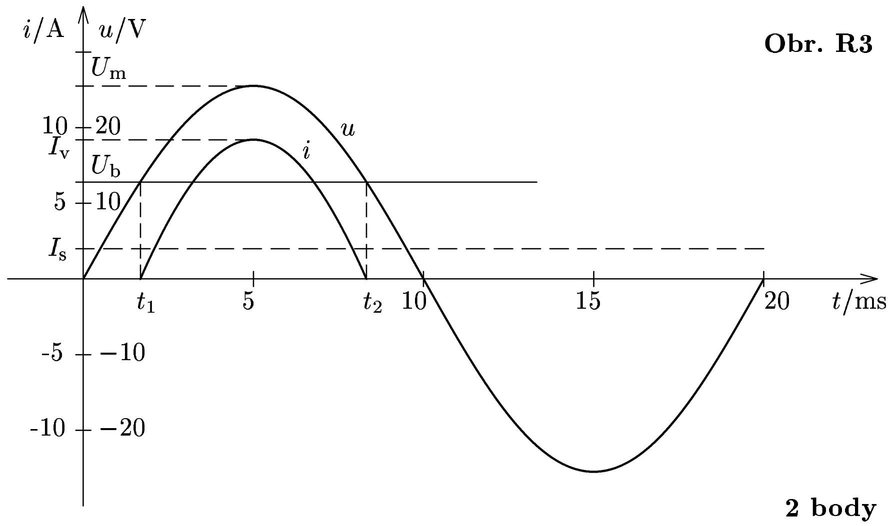
Střední hodnota nabíjecího proudu je $I_{\mathrm{s}} = Q/T$. Z uvedených vztahů úpravou dostaneme

$$R = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\omega T I_{\mathrm{s}}} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_{\mathrm{b}}}{T I_{\mathrm{s}}} (t_2 - t_1) =$$

$$= \frac{U\sqrt{2}}{2\pi I_{\mathrm{s}}} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_{\mathrm{b}}}{T I_{\mathrm{s}}} (t_2 - t_1) = 1{,}38\ \Omega\,.$$

4 body

c) Nabíjecí proud má špičkovou hodnotu $I_{\mathrm{v}} = \dfrac{U\sqrt{2} - U_{\mathrm{b}}}{R} = 9{,}2$ A. **1 bod** d)



Obr. R3

2 body

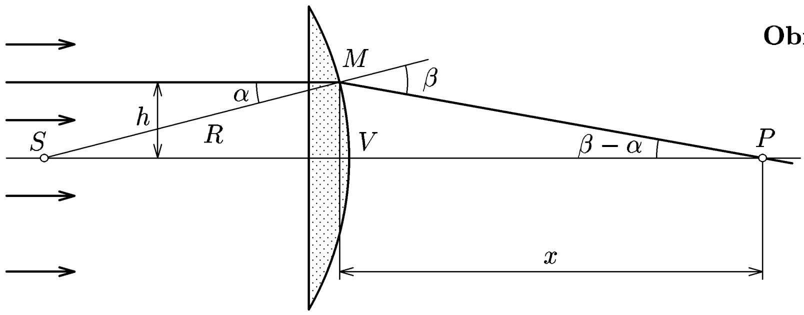
4.a) Vyjděme z obr. R4. Paprsek přicházející na čočku ve vzdálenosti h od optické osy dopadá na kulovou plochu do bodu M pod úhlem α, láme se pod úhlem β, po průchodu čočkou svírá s optickou osou úhel $\beta - \alpha$ a protíná ji v bodě P. Platí

$$\sin\alpha = \frac{h}{R}, \qquad \sin\beta = n\sin\alpha = \frac{nh}{R}, \qquad x = \frac{h}{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}.$$

Pro $h \to 0$ můžeme psát

$$\alpha \doteq \frac{h}{R}, \qquad \beta \doteq \frac{nh}{R}, \qquad x \to x_0 = \frac{h}{\beta-\alpha} = \frac{R}{n-1}.$$

Bod M přejde do vrcholu V kulového vrchlíku, bod P přejde do ohniska čočky F, které leží ve vzdálenosti x_0 od vrchlíku. Do této vzdálenosti také umístíme stínítko (obr. R4).
Pro dané hodnoty dostáváme $x_0 = 166{,}7$ mm.



Obr. R4

5 bodů

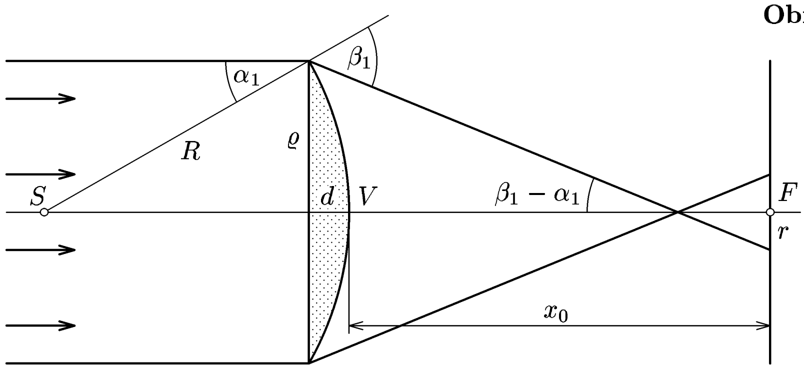
b) Odstraníme-li clonu, dopadnou na stínítko nejdále od bodu F paprsky procházející čočkou u samé hrany (obr. R5). Vzdálenost ϱ hrany od optické osy určíme podle Eukleidovy věty pro výšku:

$$\varrho = \sqrt{(2R-d)d} = 31{,}23 \text{ mm}\,.$$

Tyto paprsky dopadají na kulovou plochu čočky pod úhlem $\alpha_1 = \arcsin \dfrac{\varrho}{R} = 18{,}195°$ a lámou se pod úhlem $\beta_1 = \arcsin \dfrac{n\varrho}{R} = 29{,}974°$. Stínítko protínají ve vzdálenosti r od optické osy:

$$r = (x_0 + d)\,\mathrm{tg}(\beta_1 - \alpha_1) - \varrho = 4{,}6 \text{ mm}\,.$$

Obr. R5



5 bodů

5. a) Výchozí předpoklady můžeme vyjádřit ve tvaru

$$P_\mathrm{e} = UI = AT^4\,, \qquad R = \frac{U}{I} = BT\,,$$

kde A, B jsou konstanty dané žárovky. Spojením obou vztahů dostaneme:

$$UI = AT^4 = A\left(\frac{U}{BI}\right)^4\,, \quad I^5 = \frac{A}{B^4}U^3\,, \quad I = \sqrt[5]{\frac{A}{B^4}}\cdot U^{\frac{3}{5}} = CU^{\frac{3}{5}}\,,$$

kde C je opět konstanta dané žárovky. **3 body**

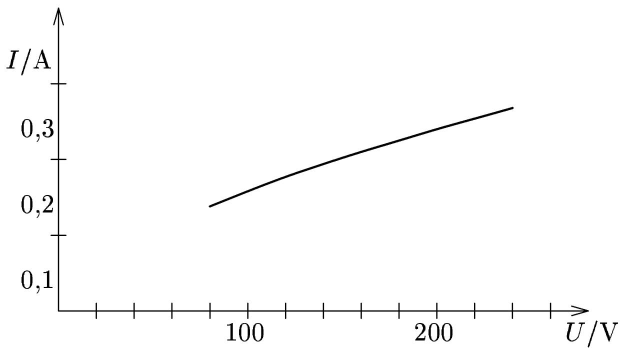
b) Danou žárovkou prochází při jmenovitém napětí 230 V proud $I = \frac{60\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} = 0{,}261\,\mathrm{A}$. Z toho určíme číselnou hodnotu konstanty C:

$$C = \frac{I}{U^{\frac{3}{5}}}\,, \qquad \{C\} = \frac{0{,}261}{230^{\frac{3}{5}}} = 0{,}00999$$

2 body

a připravíme tabulku pro sestrojení grafu:

U/V	80	100	120	140	160	180	200	220	240
I/A	0,138	0,158	0,177	0,194	0,210	0,225	0,240	0,254	0,268



Obr. R6

Pro malá napětí nejsou dostatečně přesně splněny předpoklady řešení, proto charakteristika začíná až u napětí 80 V. **2 body**

c) Zářivé výkony při napětích $U_1 = 210$ V a $U = 230$ V jsou v poměru

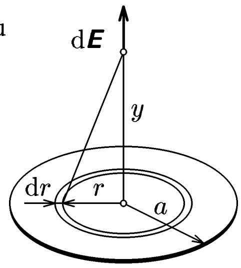
$$\frac{P_{\mathrm{e}1}}{P_\mathrm{e}} = \frac{U_1 I_1}{UI} = \frac{U_1}{U}\cdot\left(\frac{U_1}{U}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{U_1}{U}\right)^{\frac{8}{5}} = 0{,}8645 \doteq 86\ \%\,.$$

Protože při poklesu napětí se sníží i povrchová teplota vlákna, spektrum žárovky se posune do infračervené oblasti a světelný tok poklesne na ještě méně než 86 %. **3 body**

7. a) Element disku o poloměru r ($r \in \langle 0, a\rangle$) a šířce d$r$ (obr. R7) má na ose disku ve vzdálenosti y od jeho středu elektrické pole o velikosti intenzity

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{E}| = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0(y^2+r^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}} =$$

$$= \frac{Qy}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(y^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$



Obr. R7

Integrací přes celý disk dostaneme

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^a \frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(y^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\right).$$

Nad diskem je vektor intenzity orientován vzhůru, pod deskou dolů.

4 body

b) Intenzita elektrického pole disku v místě tělíska:

$$E_l = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}}\right) = \frac{Q(2-\sqrt{3})}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Úhlové frekvence kmitů:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{QE_l - mg}{ml}} = \sqrt{\frac{1}{a\sqrt{3}}\left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2 m}(2-\sqrt{3}) - g\right]},$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{1}{a\sqrt{3}}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2 m} + g\right)}.$$

4 body

c) Aby ω_H bylo reálné a nenulové, musí platit:

$$\frac{Q^2(2-\sqrt{3})}{4\pi\varepsilon_0 a^2 m} - g > 0 \qquad \text{neboli} \qquad Q > 2a\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mg}{(2-\sqrt{3})}}.$$

2 body