

Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 4), I. Volf (3)

1.a) Průměrné rychlosti jsou

$$v_{p1} = \frac{s_1}{t_1} \doteq 9,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_{p2} = \frac{s_2}{t_2} \doteq 10,05; \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

b) Vyjdeme ze vztahů

$$s_1 = s_0 + v_m(t_1 - t_0) = \frac{v_m t_0}{2} + v_m(t_1 - t_0) = v_m \left(t_1 - \frac{t_0}{2} \right), \quad (1)$$

$$s_2 = s_0 + v_m(t_2 - t_0) = \frac{v_m t_0}{2} + v_m(t_2 - t_0) = v_m \left(t_2 - \frac{t_0}{2} \right). \quad (2)$$

2 body

Odečtením rovnic (1), (2) dostaneme

$$s_2 - s_1 = v_m(t_2 - t_1), \quad v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = 11,49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

c) Vydělením rovnic (1), (2) dostaneme

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{t_2 - \frac{t_0}{2}}{t_1 - \frac{t_0}{2}}, \quad s_2(2t_1 - t_0) = s_1(2t_2 - t_0), \quad t_0 = \frac{2(s_2 t_1 - s_1 t_2)}{s_2 - s_1} = 2,50 \text{ s}.$$

2 body

Dále platí

$$a = \frac{v_m}{t_0} = \frac{(s_2 - s_1)^2}{2(s_2 t_1 - s_1 t_2)(t_2 - t_1)} \doteq 4,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$s_0 = \frac{v_m t_0}{2} = \frac{s_2 t_1 - s_1 t_2}{t_2 - t_1} \doteq 14,37 \text{ m}.$$

2 body

- 2.a) Velikost rychlosti sedačky v čase t_0 je

$$v_0 = r\omega_0 = 3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1 bod

- b) Dráha sedačky uražená během zrychleného pohybu je

$$s = \frac{1}{2}a_t t_0^2, \quad \text{kde} \quad a_t = \frac{v_0}{t_0} = \frac{r\omega_0}{t_0}$$

je tečné zrychlení sedačky. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$s = \frac{1}{2}r\omega_0 t_0 = 27 \text{ m}.$$

2 body

- c) Pro počet otáček během rovnoměrně zrychleného pohybu platí

$$N = \frac{s}{2\pi r} = \frac{\frac{1}{2}r\omega_0 t_0}{2\pi r} = \frac{\omega_0 t_0}{4\pi} \doteq 1,43.$$

2 body

- d) Pro velikosti tečného, dostředivého a celkového zrychlení v časovém intervalu od 0 do t_0 platí

$$a_t = \frac{r\omega_0}{t_0} = \text{konst.},$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}, \quad \text{kde} \quad v = a_t t = \frac{r\omega_0}{t_0} t$$

je velikost okamžité rychlosti sedačky. Po dosazení a úpravě máme

$$a_d = \frac{r\omega_0^2}{t_0^2} t^2.$$

Velikost celkového zrychlení je

$$a = \sqrt{a_d^2 + a_t^2} = \frac{r\omega_0}{t_0} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 t^4}{t_0^2}}.$$

V čase $t = t_0$ je $a_d = 0,69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a = 0,73 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3 body

- e) Velikosti tečného a dostředivého zrychlení jsou si rovny, když

$$\frac{r\omega_0}{t_0} = \frac{r\omega_0^2}{t_0^2} t^2. \quad \text{Z toho} \quad t_1 = \sqrt{\frac{t_0}{\omega_0}} = 3,5 \text{ s}.$$

2 body

- 3.a) Z rovnic pro pohyb vzhůru a pro pohyb dolů $h - h_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$, $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ plyne pro hledanou dobu

$$t = t_0 + t_1 = \sqrt{\frac{2(h - h_0)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0,87 \text{ s} + 1,21 \text{ s} = 2,08 \text{ s}.$$

Velikost počáteční rychlosti míčku a rychlosti prvního dopadu míčku na zem určíme ze zákona zachování energie:

$$mg(h - h_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2g(h - h_0)} \doteq 8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh} \doteq 11,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Obdobně určíme rychlost bezprostředně po prvním odrazu od země:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gh_0} \doteq 8,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Koeficient restituce

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h_0}{h}} \doteq 0,70. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Hledaný poměr je

$$k' = \frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{h - h_0}{h} \doteq 0,51 = 51 \%. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

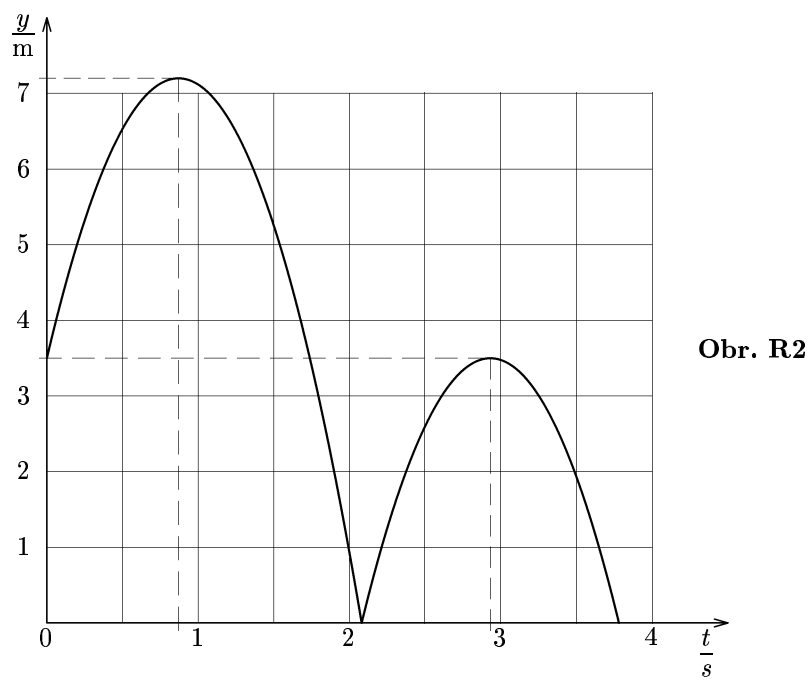
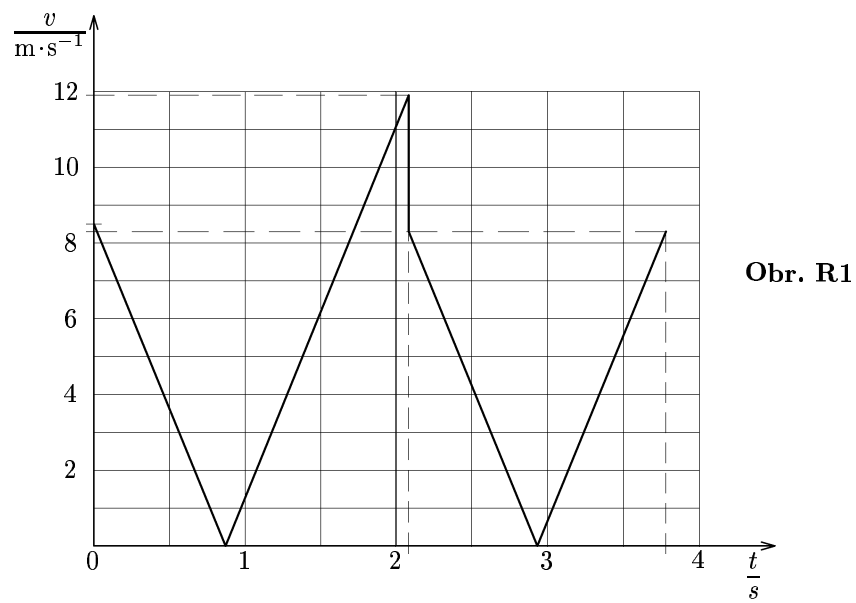
- d) Mezi prvním a druhým odrazem míčku proběhne svislý vrh vzhůru s dobou výstupu

$$t_2 = \frac{v_2}{g} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \doteq 0,85 \text{ s}.$$

Stejná bude i doba sestupu.

Pohyb míčku byl střídavě rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený. Během pohybu se velikost rychlosti míčku měnila v závislosti na čase lineárně — graf (obr. R1) je tvořen úsečkami. Výška míčku závisela na čase kvadraticky — graf (obr. R2) je tvořen parabolickými oblouky.

4 body



- 4.a) V časovém intervalu $(0, t_1)$ se lokomotiva pohybuje se zrychlením a_1 a dosáhne rychlosti

$$v_1 = a_1 t_1 = 4,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1 bod

Pak dojde k nepružné srážce. Rychlost u soupravy bezprostředně po srážce určíme užitím zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u, \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Po srážce je zrychlení a_2 soupravy menší, než zrychlení samotné lokomotivy před srážkou, protože tažná síla lokomotivy je stálá:

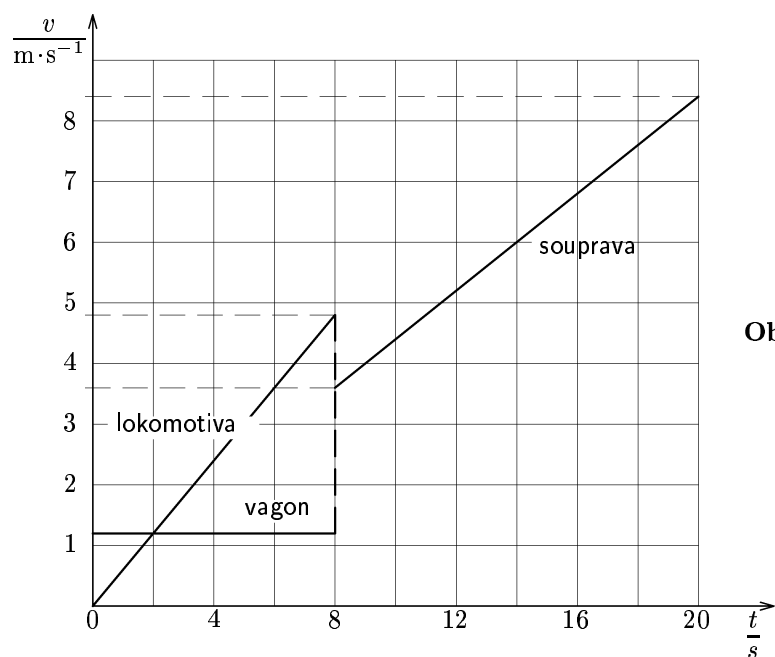
$$F = m_1 a_1 = (m_1 + m_2) a_2, \quad a_2 = a_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

V časovém intervalu (t_1, t_2) se rychlost soupravy zvětší na

$$\begin{aligned} u_2 = u + a_2(t_2 - t_1) &= \frac{m_1 a_1 t_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + a_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} (t_2 - t_1) = \\ &= \frac{m_2 v_2 + m_1 a_1 t_2}{m_1 + m_2} = 8,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

3 body

b)



Obr. R3

4 body