

Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

Autoři úloh: J. Jirů (1,2,3,5,6,7), I. Volf (4)

1. a) Označme t_1 dobu jízdy na prvním, resp. na třetím, úseku, t_2 dobu jízdy na druhém úseku, s_1 dráhu na prvním, resp. třetím, úseku. Potom platí

$$t_1 = \frac{v}{a}, \quad t_2 = \frac{d - 2s_1}{v}, \quad \text{kde} \quad s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{v_2}{2a}.$$

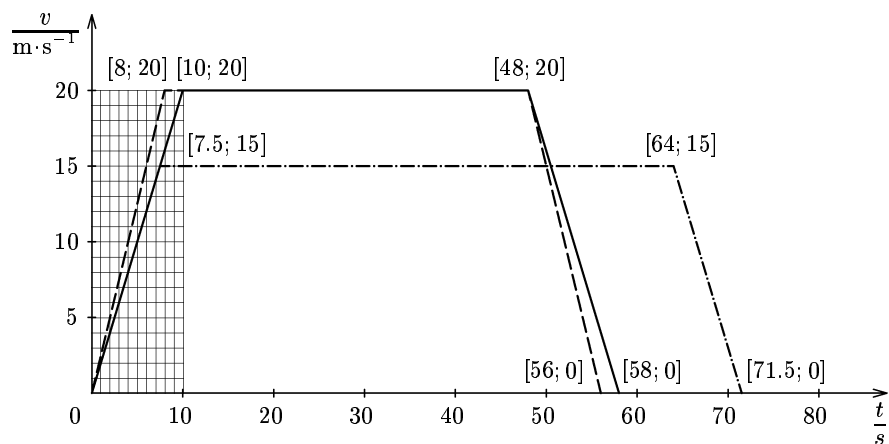
Hledaná doba pak je

$$t_{\min} = 2t_1 + t_2 = 2\frac{v}{a} + \frac{d - 2\frac{v^2}{2a}}{v} = \frac{v}{a} + \frac{d}{v} = 58 \text{ s.} \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

b)
$$t'_{\min} = \frac{v'}{a} + \frac{d}{v'} = 71,5 \text{ s.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

c)
$$t''_{\min} = \frac{v}{a'} + \frac{d}{v} = 56 \text{ s.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

d) Graf:



3 body

- e) Dráhu uraženou za prvních 10 sekund určíme z grafu jako obsah plochy pod grafem v časovém intervalu $\langle 0 \text{ s}; 10 \text{ s} \rangle$:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 \text{ m} = 100 \text{ m}, \\ s' &= \left(\frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 15 + 2,5 \cdot 15 \right) \text{ m} = 94 \text{ m}, \\ s'' &= \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \right) \text{ m} = 120 \text{ m}. \end{aligned}$$

2 body

2. a) Pro dobu pohybu do zastavení platí $t_0 = \frac{v_0}{a} = 16,67 \text{ s} < t_1$.

Dráha uražená do zastavení je $s_0 = \frac{1}{2}at_0^2$. Po dosazení vychází $s_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 125 \text{ m}$.

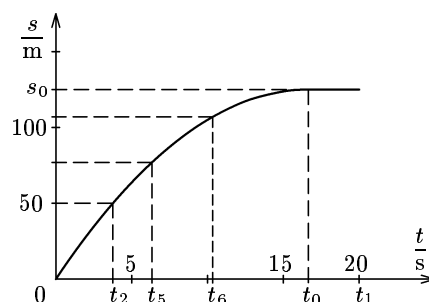
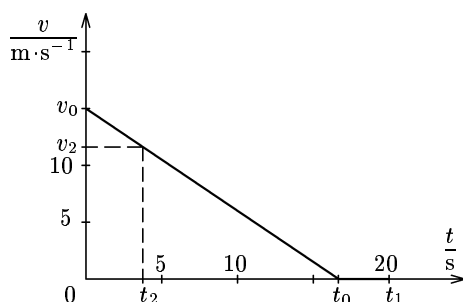
V dalším průběhu času auto stojí a dráha se nemění. Proto $s_1 = s_0 = 125 \text{ m}$.

2 body

- b) Tabulka pro sestavení grafů

t/s	0	5	10	15	16,67	20
$v/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	15	10,5	6	1,5	0	0
s/m	0	63,25	105	123,75	125	125

Grafy:



2 body

- c) Čas t_2 , ve kterém dráha dosáhne hodnoty s_2 , určíme užitím zákona dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu:

$$s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2,$$

$$t_2 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_2}}{a} = \begin{cases} 29,6 \text{ s} \\ 3,76 \text{ s} \end{cases}$$

Úloze vyhovuje menší kořen $t_2 = 3,76 \text{ s}$. V tomto čase se bude automobil pohybovat rychlostí $v_2 = v_0 - at_2 = 11,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2 body

- d) Platí

$$v_p = \frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3} = \frac{v_0(t_4 - t_3) - \frac{1}{2}a(t_4^2 - t_3^2)}{t_4 - t_3} = v_0 - \frac{1}{2}a(t_4 + t_3) = 7,35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

2 body

- e) Označme t_5 , t_6 počátek a konec hledaného časového intervalu. Platí:

$$\Delta s = v_0(t_6 - t_5) - \frac{1}{2}a(t_6^2 - t_5^2) = v_0\Delta t - \frac{1}{2}a\Delta t(2t_5 + \Delta t),$$

$$t_5 = \frac{v_0\Delta t - \Delta s}{a\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} = 6,33 \text{ s}, \quad t_6 = 10,33 \text{ s}.$$

Příslušné dráhy jsou $s_5 = 76,9 \text{ m}$, $s_6 = 106,9 \text{ m}$.

2 body

3. Označme $t_1 = 2$ s, $t_2 = 7$ s, $t_3 = 10$ s, $F_0 = 24$ kN.

a) Obsah plochy pod grafem

$$S \hat{=} F_0(t_2 - t_1) = 24\,000 \text{ N} \cdot (7 - 2) \text{ s} = 120\,000 \text{ N} \cdot \text{s} = 120\,000 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

udává v daném časovém intervalu impuls síly, a tedy přírůstek hybnosti.

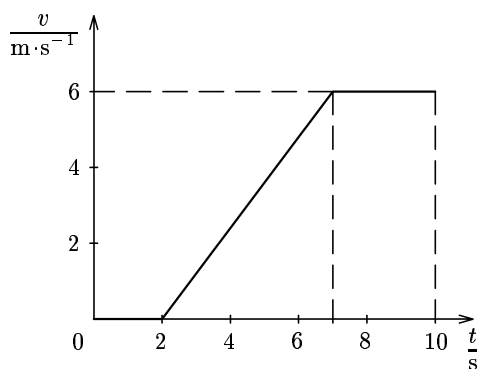
1 bod

b) Působením síly konstantní velikosti získá tramvaj rovnoměrně zrychleným pohybem konečnou rychlost

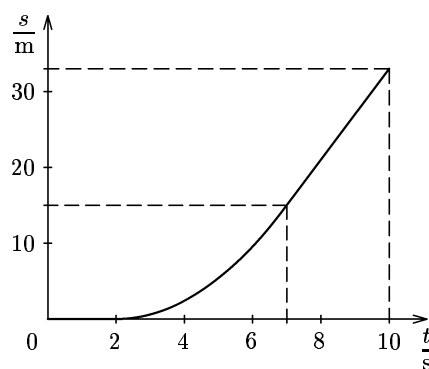
$$v = \frac{F_0(t_2 - t_1)}{m} = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

s níž se dále pohybuje setrvačností (obr. R1).

2 body



Obr. R1



Obr. R2

c) Dráha v intervalu $t_1 \leq t < t_2$ je určena vztahem

$$s = \frac{1}{2} a (t - t_1)^2, \quad \text{kde} \quad a = \frac{F_0}{m}.$$

V čase t_2 je dráha

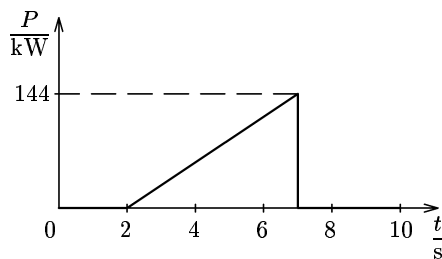
$$s_2 = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} (t_2 - t_1)^2 = 15 \text{ m}.$$

Dráha v intervalu $t_2 \leq t \leq t_3$ je určena vztahem

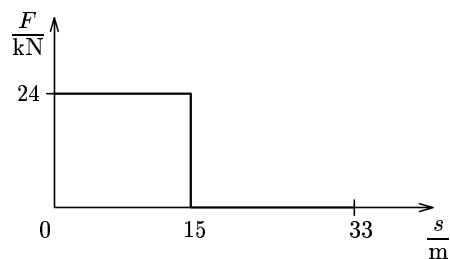
$$s = v_2(t - t_2) + s_2,$$

v čase t_3 je dráha $s_3 = 33$ m. Graf (obr. R2) vyjadřuje obsah plochy pod grafem v úloze b).

3 body



Obr. R3



Obr. R4

- d) Okamžitý výkon je v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$ přímo úměrný okamžité rychlosti, tj. $P = F_0 v$. V čase t_2 je výkon maximální, $P_2 = F_0 v_2 = 144 \text{ kW}$ (obr. R3).

2 body

- e) Síla velikosti F_0 začne působit při nulové dráze a přestane působit v čase $t_2 = 7 \text{ s}$ po projetí dráhy $s_2 = 15 \text{ m}$ (obr. R4).

2 body

4. a) Kámen hozený z výšky h_0 rychlostí o velikosti v_0 vodorovným směrem letěl po dobu

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 1,43 \text{ s} \quad (1)$$

a dopadl do vzdálenosti

$$d_0 = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 17,1 \text{ m}. \quad (2)$$

2 body

- a1) Podle vztahu (2) musí Jirka hodit kámen dvojnásobnou rychlostí, tj.

$$v'_0 = 2v_0 = 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \textbf{1 bod}$$

- a2) Doba letu v téže tíhovém poli závisí podle vztahu (1) pouze na počáteční výšce, nikoliv na rychlosti, tj.

$$v'_0 = v_0 = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \textbf{1 bod}$$

- a3) Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_d^2$$

plyne pro velikost rychlosti dopadu

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = 18,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (3)$$

Ze zákona zachování mechanické energie pro Jirkův hod

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0'^2 = \frac{1}{2}m(2v_d)^2$$

plyne pro velikost počáteční rychlosti

$$v'_0 = \sqrt{4v_d^2 - 2gh_0}$$

a po dosazení z rovnice (3) za v_d

$$v'_0 = \sqrt{4v_0^2 + 6gh_0} = 34,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \textbf{2 body}$$

- b) b1) Aby Jirka dohodil stejnou rychlostí v_0 dvakrát dále, musí být doba letu dvojnásobná. Podle vztahu (1) dostaneme rovnici

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

z níž plyne $h = 4h_0 = 40 \text{ m}$.

1 bod

- b2) Dvojnásobná doba letu bude podle b1) z téže výšky $h = 4h_0 = 40 \text{ m}$.

1 bod

- b3) Ze zákona zachování mechanické energie pro Jirkův hod z výšky h

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(2v_d)^2$$

plyne pro výšku $h = \frac{2v_d}{g} - \frac{v_0^2}{2g}$ a po dosazení rovnice (3) za v_d

$$h = \frac{3v_0^2}{2g} + 4h_0 = 62,0 \text{ m} . \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

5. a) Na pasažéra ve vozíku působí tíhová síla $\mathbf{F}_G$ a reakce sedadla $\mathbf{F}_1$. V bodě C jsou obě orientovány svisle dolů a jejich složením vzniká výsledná dostředivá síla o velikosti

$$F_d = mg + F_1 = m \frac{v_B^2}{r} .$$

Aby reakce sedadla mohla vzniknout, musí být dostředivá síla větší než síla tíhová. V mezním případě

$$F_1 = 0, \quad F_d = F_G, \quad m \frac{v_B^2}{r} = mg ,$$

$$v_B = \sqrt{gr} = 8,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv_B^2, \quad v_A^2 = 4gr + v_B^2 .$$

V mezním případě

$$v_A = \sqrt{5gr} = 18,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2 body

- c) Maximální dostředivé zrychlení má vozík v místě s maximální okamžitou rychlostí, tedy v nejnižším bodě kružnicové trajektorie. Proto platí

$$a_{d\max} = \frac{v_A^2}{r} = 49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Zrychlení směřuje do středu kružnice, tedy svisle vzhůru.

2 body

- d) Pohybuje-li se vozík bez tření a valivého odporu, může mu tečné zrychlení udělit jen složka tíhové síly rovnoběžná s tečnou k trajektorii. Maximální tečné zrychlení na kružnicové trajektorii je v bodech, v nichž tíhová síla má směr tečny ke kružnici, tj. v bodech B a D . Jeho velikost je

$$a_t = g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} .$$

Směr tečného zrychlení je v obou bodech totožný se směrem tíhového zrychlení, v bodě B proti směru okamžité rychlosti (vozík zpomaluje) a v bodě D ve směru okamžité rychlosti (vozík zrychluje).

1 bod

- e) Celkové zrychlení je určeno vektorovým součtem tečného a dostředivého zrychlení. Podle úlohy d) v bodech B a D platí $a_t = g$. Dostředivé zrychlení v bodech B a D je určeno okamžitou rychlostí v těchto bodech, kterou získáme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg \cdot r + \frac{1}{2}mv_C^2, \quad v_C^2 = v_A^2 - 2gr = 3gr ,$$

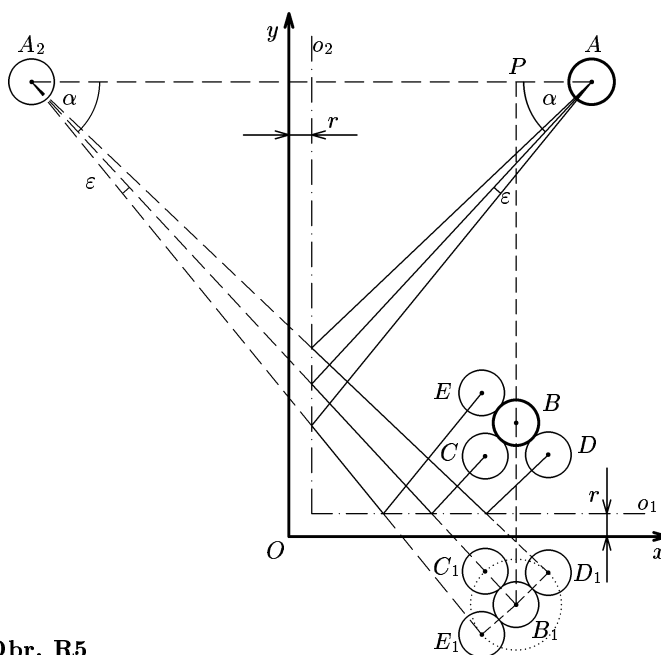
$$a_d = \frac{v_C^2}{r} = 3g .$$

Celkové zrychlení má velikost

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_d^2} = \sqrt{g^2 + (3g)^2} = \sqrt{10} \cdot g = 31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_t}{a_d} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 18,4^\circ.$$

7. a)

**Obi. R5**

5 bodů

$$s = |A_2C_1| = \sqrt{(x_A + x_B - 2r)^2 + (y_A + y_B - 2r)^2} - 2r = 881 \text{ mm}$$

Ze stejného trojúhelníka určíme i směrový úhel α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_A + y_B - 2r}{x_A + x_B - 2r} = 1,0781, \quad \alpha = 47^\circ 9'$$

3 body

- b) Maximální odchylku ε od směru určeného v úkolu a), při které se koule A ještě dotkne koule B, určíme z rovnoramenného trojúhelníka $A_2B_1D_1$:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r}{|A_2 C_1|} = \frac{r}{\sqrt{(x_A + x_B - 2r)^2 + (y_A + y_B - 2r)^2}} = 0,03188, \quad \varepsilon = 3^\circ 40'.$$

2 body